P.E. DANKO

EXERCICES ET PROBLÈMES DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

2

P. DANKO ET A. POPOV

EXERCICES ET PROBLÈMES DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

PARTIE II

ÉDITIONS MIR · MOSCOU · 1977

CHAPITRE PREMIER

INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES

§ 1. Intégrale double en coordonnées rectangulaires

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans un domaine D fermé et borné du plan xOy. Partageons le domaine D d'une façon arbitraire en n domaines élémentaires de surfaces $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ et de diamètres $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (on appelle *diamètre d'un domaine* la plus grande distance entre deux points frontières appartenant à ce domaine). Choisissons dans chaque domaine élémentaire un point arbitraire $P_k(\xi_k; \eta_k)$ et multiplions la valeur de la fonction en ce point par l'aire de ce domaine élémentaire.

On appelle *somme intégrale* de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1)\,\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\,\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\,\Delta\sigma_n.$$

On appelle *intégrale double* de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D la limite de la somme intégrale à condition que le plus grand diamètre des domaines élémentaires tende vers zéro :

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Si la fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine fermé D, alors la limite de la somme intégrale existe et ne dépend ni du mode de partitionnement du domaine D en éléments ni du choix des points P_k (*théorème d'existence* de l'intégrale double).

Si $f(x, y) > 0$ dans le domaine D, alors l'intégrale double

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$$

est égale au volume du corps cylindrique limité supérieurement par une surface $z = f(x, y)$, latéralement par une surface cylindrique à génératrices parallèles à l'axe Oz et inférieurement par le domaine D du plan xOy.

Propriétés essentielles des intégrales doubles

1) $\iint\limits_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\,d\sigma = \iint\limits_D f_1(x, y)\,d\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x, y)\,d\sigma.$

2) $\iint\limits_D c \cdot f(x, y)\,d\sigma = c \iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, où c est une constante.

3) Si le domaine d'intégration D est partagé en deux domaines D_1 et D_2, alors

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma.$$

En coordonnées cartésiennes, l'intégrale double s'écrit habituellement comme suit

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Règles de calcul des intégrales doubles

On distingue deux types fondamentaux de domaines d'intégration :

1) Le domaine d'intégration D est limité à gauche et à droite par les droites $x = a$ et $x = b$ $(a < b)$, inférieurement et supérieurement par les courbes con-

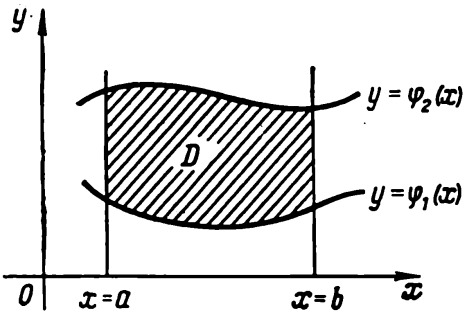

Fig. 1

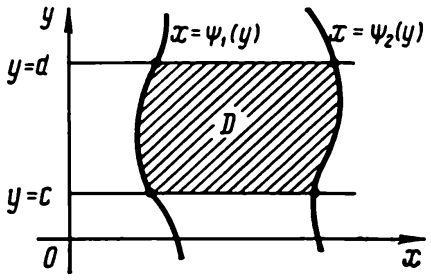

Fig. 2

tinues $y = \varphi_1(x)$ et $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x))$, dont chacune est coupée par une droite verticale en un seul point (fig. 1).

Pour un tel domaine, l'intégrale double se calcule d'après la formule

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\,;$$

dans ces conditions, on calcule d'abord l'intégrale $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$, où x est considéré constant.

2) Le domaine d'intégration D est limité inférieurement et supérieurement par les droites $y = c$ et $y = d$ $(c < d)$, à gauche et à droite par les courbes continues $x = \psi_1(y)$ et $x = \psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y))$, dont chacune est coupée par une droite horizontale seulement en un point (fig. 2).

Pour un tel domaine, l'intégrale double se calcule d'après la formule

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\,;$$

dans ce cas, on calcule d'abord l'intégrale $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$, où y est considéré constant.

Les deuxièmes membres des formules indiquées sont appelés intégrales *doubles* ou *répétées*.

Dans le cas général, le domaine d'intégration est ramené par partitionnement aux types fondamentaux examinés ci-dessus.

1. Calculer $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x - y)\, dy$.

Solution. On a

$$I = \int\limits_1^2 \left[2xy - \frac{1}{2} y^2\right]_x^{x^2} dx = \int\limits_1^2 \left(2x^3 - \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{2} x^3\right]_1^2 = 0{,}9.$$

2. Calculer $\iint\limits_D (x - y)\, dx\, dy$, si le domaine D est limité par les lignes $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

Solution. Construisons le domaine D. La première ligne est une parabole symétrique par rapport à l'axe Oy dont le sommet se situe au point (0; 2). La seconde ligne est une droite. En résolvant les deux équations $y = 2 - x^2$ et $y = 2x - 1$ de façon à les satisfaire en même temps, on trouve les coordonnées des points d'intersection A et B: A (—3; —7), B (1; 1) (fig. 3).

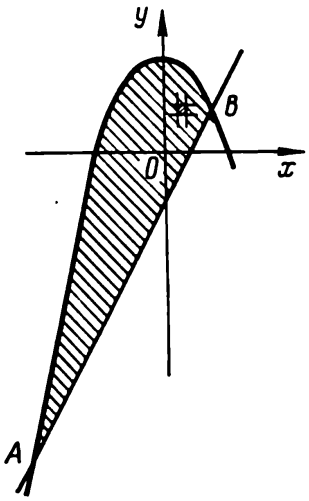

Fig. 3

Le domaine d'intégration appartient au premier type. On a

$$\iint\limits_D (x - y)\, dx\, dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left[xy - \frac{1}{2} y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2} x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x\right]_{-3}^{1} = 4\,\frac{4}{15}.$$

3. Intervertir l'ordre d'intégration pour l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy.$$

Solution. Le domaine d'intégration D est limité par les lignes (fig. 4)]

$$x = -1,\ x = 1,\ y = -\sqrt{1-x^2},\ \ y = 1 - x^2.$$

Changeons l'ordre d'intégration et pour ce faire mettons le domaine donné sous forme de deux domaines (du second type):

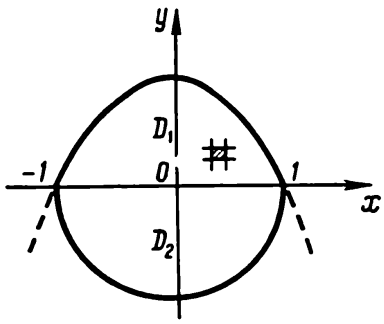

Fig. 4

D_1 limité à gauche et à droite par les branches de la parabole $x = \pm\sqrt{1-y}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, et D_2 limité par les arcs de circonférence $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 0)$.

On a alors

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

4. Calculer $\int_{0}^{2\pi} \cos^2 x\, dx \int_{0}^{a} y\, dy$.

Réponse. $\frac{\pi a^2}{2}$.

5. Calculer $\int_{1}^{3} dx \int_{x^3}^{x} (x - y)\, dy$.

Réponse. $112\frac{8}{105}$.

6. Calculer $\iint\limits_D y \ln x \, dx \, dy$ si le domaine D est limité par les lignes $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

Réponse. $\frac{5}{8}(2 \ln 2 - 1)$.

7. Calculer $\iint\limits_D (\cos 2x + \sin y) \, dx \, dy$ si le domaine D est limité par les lignes $x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y - \pi = 0$.

Réponse. $\frac{1}{4}(\pi + 1 - 2\sqrt{2})$.

8. Calculer $\iint\limits_D (3x + y) \, dx \, dy$ si le domaine D est défini par les inégalités $x^2 + y^2 \leqslant 9$, $y \geqslant \frac{2}{3}x + 3$.

Réponse. $-2\frac{94}{169}$.

9. Calculer $\iint\limits_D \sin(x + y) \, dx \, dy$ si le domaine D est limité par les lignes $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = x$.

Réponse. 1.

10. Calculer $\iint\limits_D x \, dx \, dy$ si le domaine D est un triangle de sommets $A(2\,;\,3)$, $B(7\,;\,2)$, $C(4\,;\,5)$.

Réponse. 26.

Intervertir l'ordre d'intégration :

11. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) \, dy$.

Réponse. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) \, dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) \, dx$.

12. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x, y) \, dy$.

Réponse. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y) \, dx$.

13. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx$.

Réponse. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

14. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\, dy.$

Réponse. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x, y)\, dx.$

15. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy.$

Réponse. $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_{1/2}^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$

16. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\, dy.$

Réponse. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)\, dx.$

§ 2. Changement de variables d'une intégrale double

1. Intégrale double en coordonnées polaires. La transformation d'une intégrale double, lorsqu'on passe des coordonnées rectangulaires x, y aux *coordonnées polaires* ρ, θ liées par les relations

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

se réalise d'après la formule

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Si le domaine d'intégration D est limité par deux demi-droites issues du pôle $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ et par deux courbes $\rho = \rho_1(\theta)$ et $\rho = \rho_2(\theta)$, où $\rho_1(\theta)$ et $\rho_2(\theta)$ sont des fonctions uniformes pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ et $\rho_1(\theta) \leqslant \rho_2(\theta)$, alors l'*intégrale double se calcule d'après la formule*

$$\iint\limits_D F(\rho, \theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int\limits_\alpha^\beta d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\, \rho\, d\rho,$$

où $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$; dans ces conditions, on calcule d'abord l'intégrale $\int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\, \rho\, d\rho$, dans laquelle la grandeur θ est considérée constante.

2. Intégrale double en coordonnées curvilignes. Soit à transformer une intégrale double en passant des coordonnées rectangulaires x, y aux *coordonnées curvilignes* u, v liées par les relations

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

où les fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ admettent des dérivées partielles continues dans un domaine D' du plan $uO'v$ et le *jacobien de la transformation* dans le domaine D' ne s'annule pas:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dans ces conditions, une correspondance biunivoque et bicontinue s'établit

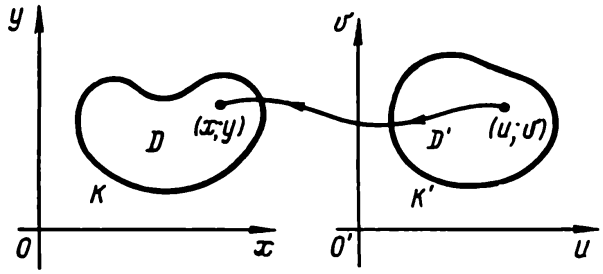

Fig. 5

entre les points du domaine D du plan xOy et les points du domaine D' du plan $uO'v$ (fig. 5).

Dans ce cas, la *formule de transformation d'une intégrale double* est de la forme

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\, |J|\, du\, dv.$$

En coordonnées polaires

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

17. En passant aux coordonnées polaires, calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, si D est le Ier quadrant du disque $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Solution. En posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, on a:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}.$$

18. Calculer $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ si le domaine D est une couronne comprise entre les circonférences $x^2+y^2=e^2$ et $x^2+y^2=e^4$.

Solution. Passons aux coordonnées polaires :

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint\limits_D \ln\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=2\iint\limits_D \rho\ln\rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_e^{e^2}\rho\ln\rho\,d\rho.$$

En intégrant par parties l'intégrale qui comporte ρ, on obtient

$$2\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho-\frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2}d\theta=\pi e^2(3e^2-1).$$

19. Calculer $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy$ si le domaine D est le carré limité par les droites $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ (fig. 6).

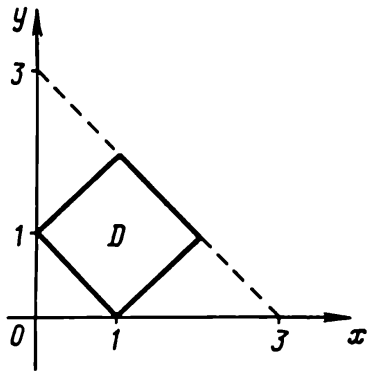

Fig. 6

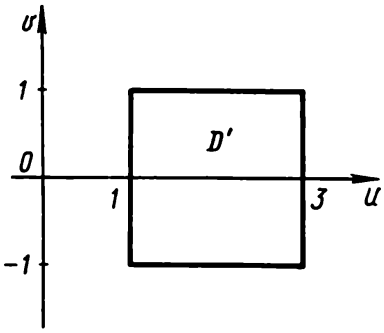

Fig. 7

Solution. Posons $x+y=u$, $x-y=v$, d'où $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$. Alors, le jacobien de la transformation

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},\quad \text{c'est-à-dire } |J|=\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'} u^3v^2\,du\,dv.$

Vu le fait que le domaine D' est lui aussi un carré (fig. 7), alors

$$\iint\limits_D (x+y)^3 (x-y)^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3\, du \int\limits_{-1}^1 v^2\, dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3 \cdot \frac{1}{3} v^3 \Big|_{-1}^1 du = \frac{1}{6}\int\limits_1^3 u^3 (1+1)\, du = \frac{1}{12} u^4 \Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

En passant aux coordonnées polaires, calculer les intégrales doubles :

20. $\iint\limits_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx\, dy$ si le domaine D est le disque $x^2 + y^2 \leqslant \pi^2$.

Réponse. $2\pi^3$.

21. $\iint\limits_D \frac{dx\, dy}{x^2+y^2+1}$ si le domaine D est limité par la demi-circonférence $y = \sqrt{1-x^2}$ et l'axe Ox.

Réponse. $\frac{\pi}{2} \ln 2$.

22. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\, dx\, dy$ si le domaine D est limité par la circonférence $x^2 + y^2 = 2ax$.

Réponse. $\frac{3}{2}\pi a^4$.

23. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$ si le domaine D est limité par les lignes $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}$, $x^2 + y^2 = \pi^2$.

Réponse. 3π.

24. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ si le domaine D est limité par les lignes $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 4a^2$.

Réponse. $\frac{14}{3}\pi a^3$.

25. Calculer $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} dy$ en introduisant les nouvelles variables $x = u(1-v)$, $y = uv$.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

26. Calculer $\iint\limits_D dx\, dy$ si le domaine D est limité par les lignes $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 3x$.

Indication. Effectuer le changement de variables $x=\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$, $y=(uv)^{\frac{1}{2}}$.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln 3$.

§ 3. Calcul des aires des figures planes

L'*aire d'une figure plane* limitée par le domaine D se calcule d'après la formule

$$S=\iint\limits_D dx\,dy.$$

Si le domaine D est, par exemple, défini par les inégalités $a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$, alors

$$S=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Si le domaine D donné en coordonnées polaires est défini par les inégalités $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, $\varphi(\theta)\leqslant\rho\leqslant f(\theta)$, alors

$$S=\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_\alpha^\beta d\theta\int\limits_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)}\rho\,d\rho.$$

27. Calculer l'aire de la figure limitée par les lignes $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

Solution. Calculons les coordonnées des points d'intersection des lignes données en résolvant le système d'équations $x=4y-y^2$ et $x+y=6$ (on recommande au lecteur de tracer le dessin). Par suite, on obtient A (4; 2), B (3; 3).

Donc,

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx=\int\limits_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy=$$

$$=\int\limits_2^3(-y^2+5y-6)\,dy=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right]_2^3=\frac{1}{6}.$$

28. Calculer l'aire de la figure limitée par les circonférences $\rho=1$, $\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ (en dehors de la circonférence $\rho=1$) (fig. 8).

Solution. Calculons les coordonnées du point $A: 1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire $A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$. Alors

$$S = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int\limits_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} \rho\, d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{4}{3}\cos^2\theta - 1\right) d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos 2\theta - 1\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\theta - 1)\, d\theta = \frac{1}{3}\left[\sin 2\theta - \theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{18}(3\sqrt{3} - \pi).$$

29. Calculer l'aire de la lemniscate $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Solution. Transformons l'équation de la courbe en passant aux coordonnées polaires et en posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. On obtient $\rho^2 = 2a^2\sin\theta\cos\theta = a^2\sin 2\theta$ (voir partie I, page 15).

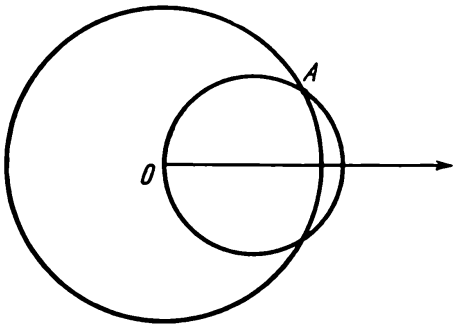

Fig. 8

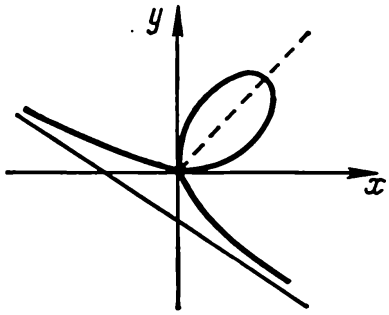

Fig. 9

Du fait de la symétrie de la courbe, l'aire s'exprime comme suit :

$$S = 4\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\theta = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \rho\, d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta\, d\theta = -a^2\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

30. Calculer l'aire de la figure limitée par la ligne $x^3+y^3=$ $=axy$ (aire de la boucle; fig. 9).

Solution. Transformons l'équation donnée en passant aux coordonnées polaires: $\rho^3(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=a\rho^2\sin\theta\cos\theta$, c'est-à-dire $\rho=\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$. L'axe de symétrie de la boucle est la demi-droite $\theta=\frac{\pi}{4}$, d'où il vient

$$S=2\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^{\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}}\rho\,d\rho=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^2\theta\cos^4\theta}{\cos^6\theta\,(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\operatorname{tg}^2\theta\,d(\operatorname{tg}\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(1+\operatorname{tg}^3\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=$$

$$=\left[-\frac{a^2}{3(1+\operatorname{tg}^3\theta)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{6}.$$

31. Calculer l'aire limitée par les lignes $x=y^2-2y$, $x+y=0$

Réponse. $\frac{1}{6}$.

32. Calculer l'aire limitée par les lignes $y=2-x$, $y^2=4x+$ $+4$.

Réponse. $\frac{64}{3}$.

33. Calculer l'aire limitée par les lignes $y^2=4x-x^2$, $y^2=2x$ (en dehors de la parabole).

Réponse. $S=2\pi-\frac{16}{3}$.

34. Calculer l'aire limitée par les lignes $3y^2=25x$, $5x^2=9y$.

Réponse. 5.

35. Calculer l'aire limitée par les lignes $y^2+2y-3x+1=0$, $3x-3y-7=0$.

Réponse. $\frac{125}{18}$.

36. Calculer l'aire de la figure la plus proche de l'origine des coordonnées et limitée par les lignes $y=\cos x$, $y=\cos 2x$, $y=0$.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

37. Calculer l'aire limitée par les lignes $y=4x-x^2$, $y=$ $=2x^2-5x$.

Réponse. $\frac{27}{2}$.

38. Calculer l'aire limitée par les lignes $x = 4 - y^2$, $x + 2y - 4 = 0$.

Réponse. $\frac{4}{3}$.

39. Calculer l'aire limitée par les lignes $\rho = 2(1 - \cos\theta)$, $\rho = 2$ (en dehors de la cardioïde).

Réponse. $8 - \pi$.

40. Calculer l'aire limitée par les lignes $\rho = 2(1 + \cos\theta)$, $\rho = 2\cos\theta$.

Réponse. 5π.

41. Calculer l'aire limitée par les lignes $y^2 = 4(1 - x)$, $x^2 + y^2 = 4$ (en dehors de la parabole).

Réponse. $2\pi - \frac{8}{3}$.

§ 4. Calcul des volumes

Le *volume d'un corps cylindrique* limité supérieurement par une surface continue $z = f(x, y)$, inférieurement par le plan $z = 0$ et latéralement par une surface cylindrique droite ayant pour trace sur le plan xOy le domaine D, se calcule d'après la formule

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

42. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ et situé dans le Ier octant.

Solution. Le corps dont on cherche le volume est limité supérieurement par la surface $z = 3x$, latéralement par le cylindre parabolique $y = 1 + x^2$ et le plan $y = 5$. Par conséquent, c'est un corps cylindrique. Le domaine d'intégration D est limité par la parabole $y = 1 + x^2$ et les droites $y = 5$ et $x = 0$.

Le volume du corps

$$V = \iint_D 3x\,dx\,dy = 3\int_0^2 x\,dx \int_{1+x^2}^5 dy = 3\int_0^2 x\,[y]_{1+x^2}^5\,dx =$$

$$= 3\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 3\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 12.$$

43. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = 1 - x^2 - y^2$; $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ et situé dans le Ier octant.

Solution. Le corps donné est limité supérieurement par le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$. Le domaine d'intégration D est un secteur circulaire limité par un arc de la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ (ligne d'intersection du paraboloïde avec le plan $z = 0$) et

les droites $y = x$ et $y = x\sqrt{3}$. Le volume du corps

$$V = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Vu que le domaine d'intégration est représenté par une portion de disque et que la fonction sous le signe d'intégration est fonction de $x^2 + y^2$, il est bon de passer aux coordonnées polaires:

$$V = \iint\limits_D (1 - \rho^2)\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int\limits_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho.$$

Les limites d'intégration par rapport à θ ont été trouvées à partir des équations des droites: $y = x$, ici le coefficient angulaire $k_1 = \operatorname{tg} \theta_1 = 1$, c'est-à-dire $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$; $y = x\sqrt{3}$, ici $k_2 = \operatorname{tg} \theta_2 = \sqrt{3}$, c'est-à-dire $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$.

Ainsi, on a

$$V = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{48}.$$

44. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

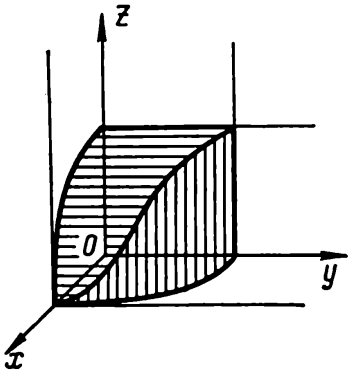

Fig. 10

S o l u t i o n. Examinons la huitième partie du corps donné (fig. 10):

$$\frac{1}{8} V = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy =$$

$$= \int\limits_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right]_0^a = \frac{2}{3} a^3.$$

Par conséquent,

$$V = \frac{16}{3} a^3.$$

45. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$.

Réponse. $8\pi - \frac{32}{3}\sqrt{2}$.

46. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{17}{5}$.

47. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $x^2 + 4y^2 + z = 1$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$.

48. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{88}{105}$.

49. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = 4 - x^2$, $2x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{40}{3}$.

50. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z^2 = xy$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 4$.

Réponse. $\frac{32}{9}$.

51. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = 5x$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$.

Réponse. 90.

52. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $x + y + z = 6$, $3x + 2y = 12$, $3x + y = 6$, $y = 0$, $z = 0$.

Réponse. 12.

53. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = x + y + 1$, $y^2 = x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{79}{60}$.

54. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = 0$, $z = xy$, $x^2 + y^2 = 4$.

Réponse. 4.

55. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, $z = \frac{x}{2}$, $z = x$.

Réponse. $\frac{1}{3} a^2 b$.

§ 5. Calcul des aires des surfaces

Si une surface lisse uniforme est donnée par l'équation $z = f(x, y)$, alors son *aire* s'exprime par la formule

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

où D est la projection de la surface donnée sur le plan xOy. D'une façon analogue, si une surface est donnée par l'équation $x = f(y, z)$, alors

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz,$$

où D est la projection de la surface sur le plan yOz; si l'équation de la surface est de la forme $y = f(x, z)$, alors

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz,$$

où D est la projection de la surface sur le plan xOz.

56. Calculer l'aire de la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ comprise dans le cylindre $x^2 + y^2 = ay$ (fig. 11).

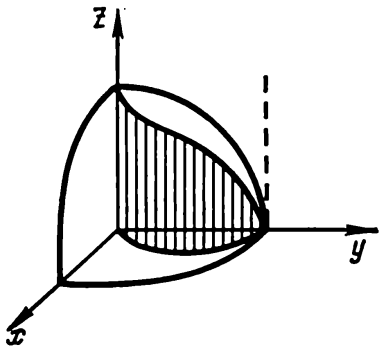

Fig. 11

S o l u t i o n. A partir de l'équation de la sphère, on a (pour le Ier octant):

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

La partie de sphère qui se situe dans le Ier octant a comme projection sur le plan xOy le demi-disque limité par la circonférence $x^2 + y^2 = ay$ et l'axe Oy. Ce demi-disque représente justement le domaine d'intégration D.

La surface qui nous intéresse est disposée en quatre octants et, par conséquent, l'aire cherchée

$$S = 4a \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

En passant aux coordonnées polaires, l'équation de la circonférence va s'écrire $\rho = a \sin\theta$ et

$$S = 4a \iint_D \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 4a \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sin\theta} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= -4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_0^{a\sin\theta} d\theta = -4a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - 1)\,d\theta =$$

$$= -4a^2 [\sin\theta - \theta]_0^{\pi/2} = 4a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

57. Calculer l'aire de la portion du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprise dans le cylindre $x^2 + y^2 = 2x$ (fig. 12).

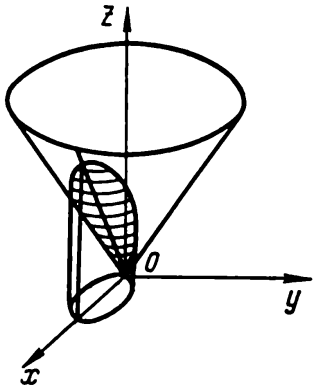

Fig. 12

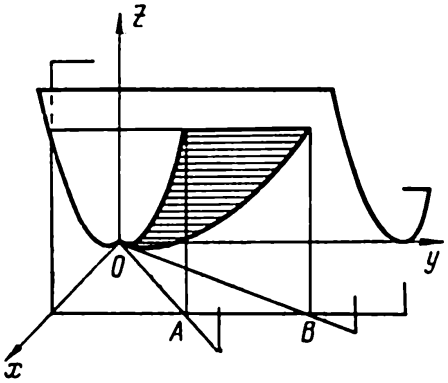

Fig. 13

S o l u t i o n. A partir de l'équation du cône, on a :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Le domaine d'intégration D est le disque limité par la circonférence $x^2 + y^2 = 2x$, ou $\rho = 2\cos\theta$. Alors

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy =$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_D dx\,dy=\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho\,d\rho=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}4\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=2\sqrt{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}=\pi\sqrt{2}.$$

58. Calculer l'aire de la surface du cylindre $x^2=2z$ découpée par les plans $x-2y=0$, $y=2x$, $x=2\sqrt{2}$ (fig. 13).

S o l u t i o n. Le domaine d'intégration est représenté par le triangle OAB. On a à partir de l'équation du cylindre:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Alors

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{2x}dy=$$

$$=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\frac{3}{2}x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{3}{4}\int\limits_0^{2\sqrt{2}}(1+x^2)^{1/2}\,d(1+x^2)=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^{2\sqrt{2}}=13.$$

59. Calculer l'aire de la portion de la surface du paraboloïde $x=1-y^2-z^2$ découpée par le cylindre $y^2+z^2=1$.

S o l u t i o n. Le domaine d'intégration est la circonférence $y^2+z^2=1$ (le domaine se situe dans le plan yOz). On a à partir de l'équation du paraboloïde:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-2z.$$

Alors

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz=$$

$$=\iint\limits_D\sqrt{1+4(y^2+z^2)}\,dy\,dz.$$

En passant aux coordonnées polaires, on obtient:

$$S=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\, d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+4\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$$

60. Calculer l'aire de la portion de la surface $y = x^2 + z^2$ découpée par le cylindre $x^2 + z^2 = 1$ et située dans le Ier octant.

Réponse. $\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{24}$.

61. Calculer l'aire de la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ découpée par le cylindre $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Réponse. $\frac{16}{3}\pi$.

62. Calculer l'aire de la portion de la surface $z = x$ située dans le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et au-dessus du plan $z = 0$.

Réponse. $2\pi\sqrt{2}$.

63. Calculer l'aire de la portion de la surface du cylindre $z = x^2$ découpée par les plans $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

Réponse. $\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3 + 2\sqrt{2})$.

64. Calculer l'aire de la surface du cône $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ située dans le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Réponse. π.

65. Calculer l'aire de la surface du cylindre $x^2 + z^2 = 4$ située dans le cylindre $x^2 + y^2 = 4$.

Réponse. 32.

66. Calculer l'aire de la portion de la surface $z^2 = 2xy$ découpée par les plans $x = 1$, $y = 4$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{40\sqrt{2}}{3}$.

§ 6. Applications mécaniques de l'intégrale double

Si une plaque occupe un domaine D du plan xOy et possède une densité superficielle variable $\gamma = \gamma(x, y)$, alors la *masse* M de cette plaque est donnée par l'intégrale double:

$$M = \iint_D \gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

Les *moments statiques* M_x et M_y de la plaque par rapport aux axes Ox et Oy sont :

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)\,dx\,dy, \qquad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Si la plaque est homogène, on a $\gamma = \text{const}$.

Les *coordonnées* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *du centre de gravité de la plaque* peuvent être calculées d'après les formules

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M},$$

où M est la masse de la plaque, M_x et M_y étant ses moments statiques par rapport aux axes de coordonnées.

Si la plaque est homogène, ces formules prennent la forme

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{S}; \qquad \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{S},$$

où S est l'aire du domaine D.

Les *moments d'inertie* de la plaque *par rapport aux axes* Ox et Oy sont respectivement

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Le *moment d'inertie* de la plaque *par rapport à l'origine des coordonnées* est

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y)\,dx\,dy = I_x + I_y.$$

En posant $\gamma(x, y) = 1$ dans ces formules, on obtient les formules utilisables au calcul des moments d'inertie géométriques d'une figure plane.

67. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les lignes $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$ (fig. 14).

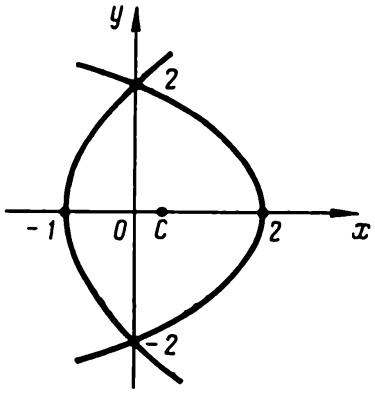

Fig. 14

S o l u t i o n. Vu le fait que la figure est symétrique par rapport à l'axe Ox, alors $\bar{y} = 0$. Il ne reste qu'à trouver $\bar{x}$.

Calculons l'aire de la figure en question

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=2\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx=$$

$$=2\int\limits_0^2\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=2\int\limits_0^2\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy=6\left[y-\frac{1}{12}y^3\right]_0^2=8.$$

Alors

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\iint\limits_D x\,dx\,dy=\frac{1}{8}\cdot 2\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^2\left[\frac{1}{4}(4-y^2)^2-\frac{1}{16}(y^2-4)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^2\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=\frac{1}{8}\left[3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right]_0^2=\frac{2}{5}.$$

68. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par l'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ et par sa corde $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$.

S o l u t i o n. Calculons l'aire du segment:

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_0^5 dx\int\limits_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\int\limits_0^5\left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-3+\frac{3}{5}x\right)dx=\frac{15}{4}(\pi-2).$$

Alors

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 x\,dx\int\limits_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5\left[\frac{3}{5}x\sqrt{25-x^2}-3x\left(1-\frac{x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left[-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{5}\right]_0^5=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left(25-\frac{75}{2}+25\right)=\frac{10}{3(\pi-2)};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 dx\int\limits_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} y\,dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^5\left[\frac{9}{25}(25-x^2)-9\left(1-\frac{x}{5}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{2\cdot 9\cdot 2}{15(\pi-2)\cdot 25}\int\limits_0^5(5x-x^2)\,dx=\frac{12}{125(\pi-2)}\left[\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^5=$$

$$=\frac{12}{125(\pi-2)}\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{2}{\pi-2}.$$

69. Calculer le moment d'inertie polaire de la figure limitée par les lignes $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$.

S o l u t i o n. Le moment d'inertie par rapport à l'origine des coordonnées est

$$I_0=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}(a-x)}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{b}{a}(a-x)}dx=$$

$$=\int\limits_0^a\left[\frac{b}{a}x^2(a-x)+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}bx^3-\frac{b}{4a}x^4-\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{4}(a-x)^4\right]_0^a=\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$$

70. Calculer le moment d'inertie de la figure limitée par la cardioïde $\rho=a(1+\cos\theta)$ par rapport à l'axe Ox.

S o l u t i o n. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox est

$$I_x=\iint\limits_D y^2\,dx\,dy.$$

Passons aux coordonnées polaires:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

Alors

$$I_x=\iint\limits_D\rho^2\sin^2\theta\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int\limits_0^{a(1+\cos\theta)}\rho^3\,d\rho=$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cdot \frac{1}{4}\rho^4 \Big|_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta = \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,(1+\cos\theta)^4\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,(1 + 4\cos\theta + 6\cos^2\theta + 4\cos^3\theta + \cos^4\theta)\, d\theta = \frac{21}{32}\pi a^4.$$

71. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par les lignes $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$.

Réponse. $C\left(\frac{45}{28}; \frac{279}{70}\right)$.

72. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire intérieure à la cardioïde $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$.

Réponse. $\bar{x} = \frac{5}{6}a$, $\bar{y} = 0$.

73. Calculer les coordonnées du centre de gravité du demi-segment de la parabole $y^2 = ax$ découpé par les droites $x = a$, $y = 0$ $(y > 0)$.

Réponse. $\bar{x} = \frac{3}{5}a$, $\bar{y} = \frac{3}{8}a$.

74. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par une boucle de la courbe $\rho = a \sin 2\theta$.

Réponse. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{128\,a}{105\,\pi}$.

75. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par les paraboles $y^2 = x$, $x^2 = y$.

Réponse. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{9}{20}$.

76. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = 2p$.

Réponse. $\bar{x} = \frac{6}{5}p$, $\bar{y} = 0$.

77. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par les lignes $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$.

Réponse. $\bar{x} = 1$, $y = \frac{4}{3\pi}$.

78. Calculer le moment d'inertie de l'aire limitée par les lignes $y = \sqrt{4x}$, $x + y = 3$, $y = 0$ par rapport à l'axe Ox.

Réponse. 2,4.

79. Calculer le moment d'inertie polaire de l'aire limitée par les droites $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

Réponse. $\frac{8}{3}$.

80. Calculer le moment d'inertie de l'aire limitée par les lignes $y = 4 - x^2$, $y = 0$ par rapport à l'axe Ox.

Réponse. $\frac{4096}{105}$.

81. Calculer le moment d'inertie de l'aire de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ par rapport à son grand axe.

Réponse. $\frac{\pi a b^3}{4}$.

82. Calculer la masse d'une plaque carrée de côté a dont la densité en chaque point est proportionnelle au carré de la distance de ce point à l'un des sommets du carré.

Réponse. $\frac{2}{3} a^4 k$, où k est le coefficient de proportionnalité.

83. Calculer la masse d'un disque de rayon r si l'on sait que sa densité en chaque point est inversement proportionnelle à la distance du point au centre, étant égale à δ sur sa périphérie.

Réponse. $2\pi r^2 \delta$.

84. Calculer le moment statique d'une plaque ayant la forme d'un triangle rectangle de côtés $OA = a$, $OB = b$ par rapport au côté OA, si l'on sait que la densité de la plaque en chaque point est égale à la distance du point au côté OA.

Réponse. $\frac{1}{12} a b^3$.

§ 7. Intégrale triple

Soit $f(x, y, z)$ une fonction définie dans un domaine T fermé et borné de l'espace.

Décomposons le domaine T arbitrairement en n domaines élémentaires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de diamètres $d_1, d_2, \ldots, d_n$ et de volumes $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$.

Prenons dans chaque domaine élémentaire T_k un point arbitraire $P_k(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$, calculons $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ et multiplions $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ par ΔV_k.

On appelle *somme intégrale* de la fonction $f(x, y, z)$ dans le domaine T une somme de la forme $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta V_k$.

On appelle *intégrale triple* de la fonction $f(x, y, z)$ dans le domaine T la limite de la somme intégrale à condition que $\max d_k \to 0$:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta V_k.$$

Pour une fonction continue dans le domaine T, cette limite existe et ne dépend ni du mode de décomposition du domaine T en domaines élémentaires, ni du choix des points P_k (*théorème d'existence* de l'intégrale triple).

Si $f(x, y, z) > 0$ dans le domaine T, alors l'intégrale triple $\iiint_T f(x, y, z)\, dV$ donne la *masse du corps* de densité variable $\gamma = f(x, y, z)$ qui occupe le domaine T (interprétation physique de l'intégrale triple).

Les propriétés essentielles des intégrales triples sont analogues à celles des intégrales doubles.

En coordonnées cartésiennes, l'intégrale triple s'écrit habituellement sous la forme

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Admettons que le domaine d'intégration T soit défini par les inégalités:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y),$$

où $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$ et $z_2(x, y)$ sont des fonctions continues. Alors l'intégrale triple de la fonction $f(x, y, z)$ dans le domaine T se calcule d'après la formule

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Si, lors du calcul d'une intégrale triple, on a besoin de passer des variables x, y, z aux nouvelles variables u, v, w liées aux premières par les relations $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, où $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ et leurs dérivées partielles premières sont des fonctions continues

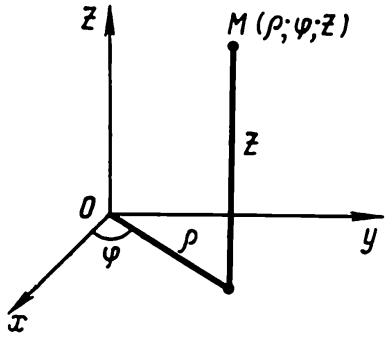

Fig. 15

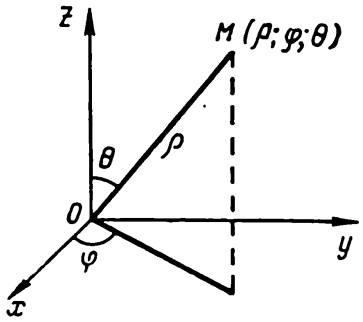

Fig. 16

qui établissent une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points du domaine T de l'espace $Oxyz$ et les points d'un certain domaine T' de l'espace $Ouvw$, et que le jacobien J ne s'annule pas dans le domaine T'

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

alors on se sert de la formule

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{T'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J|\, du\, dv\, dw.$$

En particulier, lors du passage des coordonnées cartésiennes x, y, z aux *coordonnées cylindriques* ρ, φ, z (fig. 15) liées aux premières par les relations $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ $(0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z + \infty)$,

le jacobien de la transformation est

$$J = \rho$$

et la *formule permettant de ramener l'intégrale triple aux coordonnées cylindriques* est de la forme

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Lors du passage des coordonnées cartésiennes x, y, z aux *coordonnées sphériques* ρ, φ, θ (fig. 16) liées aux premières par les relations $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ $(0 \leqslant \rho \leqslant +\infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, le jacobien de la transformation est

$$J = \rho^2 \sin\theta$$

et la *formule permettant de ramener l'intégrale triple aux coordonnées sphériques* est de la forme

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_T f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

85. Calculer $I = \iiint\limits_T z\, dx\, dy\, dz$, où le domaine T est défini par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\quad x \leqslant y \leqslant 2x,\quad 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Solution. On a

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} (1 - x^2 - y^2)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[y - yx^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_x^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x - 2x^3 - \frac{8}{3}x^3 - x + x^3 + \frac{1}{3}x^3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{10}{3}x^3\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16}\right) = \frac{7}{192}.$$

86. Calculer $I = \iiint\limits_T x^2\,dx\,dy\,dz$ si T est la boule $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.

Solution. En passant aux coordonnées sphériques, on obtient

$$I = \iiint\limits_T \rho^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^4\, d\rho =$$

$$= \frac{R^5}{5\cdot 2} \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi R^5}{5} \int\limits_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1)\, d(\cos\theta) = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

87. Calculer $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$ si le domaine T est limité par le cylindre $x^2+y^2=2x$ et les plans $y=0$, $z=0$, $z=a$.

Solution. En passant aux coordonnées cylindriques, on trouve

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_T z\rho\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2\, d\rho \int\limits_0^{a} z\, dz = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{9}a^2.$$

88. Calculer $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$ si le domaine T est la moitié supérieure de la boule $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$.

Solution. Introduisons les coordonnées sphériques; les nouvelles variables changent dans les limites $0 \leqslant \rho \leqslant r$, $0 \leqslant \varphi \leqslant$

$\leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. On obtient

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T \rho^4 \sin^3\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int_0^r \rho^4\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^r \rho^4\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 1)\,d(\cos\theta) =$$

$$= 2\pi \int_0^r \rho^4\,d\rho \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{15}\pi r^5.$$

89. Calculer $\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ si le domaine T est un parallélépipède rectangle défini par les inégalités $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

Réponse. $\frac{abc}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

90. Calculer $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$ si le domaine T est limité par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{1}{48}$.

91. Calculer $\iiint\limits_T xy^2z^3dx\,dy\,dz$ si le domaine T est limité par les surfaces $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

Réponse. $\frac{1}{364}$.

92. Calculer $\iiint\limits_T (2x + 3y - z)\,dx\,dy\,dz$ si le domaine T est un prisme triangulaire borné par les plans $z = 0$, $z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = b$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Réponse. $\frac{ab^2}{12}(10b - 3a)$.

93. Calculer $\iiint\limits_T (x^2 + y + z^2)^3\,dx\,dy\,dz$ si le domaine T est limité par le cylindre $x^2 + z^2 = 1$ et les plans $y = 0$, $y = 1$.

Indication. Utiliser les coordonnées cylindriques.

Réponse. $\frac{3}{2}\pi$.

94. Calculer $\iiint\limits_T (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$, où le domaine T est la portion commune au paraboloïde $z \geqslant \frac{x^2+y^2}{2a}$ et à la boule $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$.

Réponse. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

95. Calculer $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, où le domaine T est limité par les surfaces $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=2$.

Indication. Se servir des coordonnées cylindriques.

Réponse. $\frac{16}{3}\pi$.

96. Calculer $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$, où le domaine T est la boule $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

Indication. Se servir des coordonnées sphériques.

Réponse. $\frac{4}{3}\pi r^3$.

97. Calculer $\iiint\limits_T \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$ si T est la boule $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

Indication. Utiliser les coordonnées sphériques.

Réponse. $\frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$.

§ 8. Applications des intégrales triples

Le *volume d'un corps* qui occupe le domaine T est donné par la formule

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

Si la densité de ce corps est une grandeur variable ($\gamma=\gamma(x, y, z)$), alors la masse se calcule d'après la formule

$$M=\iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

Les *coordonnées du centre de gravité* du corps sont déterminées d'après les formules:

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma x\,dx\,dy\,dz,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma y\,dx\,dy\,dz,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma z\,dx\,dy\,dz.$$

En posant $\gamma=1$, on a

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz;\qquad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz;\qquad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$$

($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sont les coordonnées du centre de gravité géométrique).

Les *moments d'inertie* (géométriques) par rapport aux axes des coordonnées sont respectivement:

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_T (z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

98. Calculer le volume du corps borné par les surfaces $hz = x^2 + y^2$, $z = h$ (fig. 17).

Solution. Le corps donné est borné inférieurement par le paraboloïde $z = \frac{x^2+y^2}{h}$ et supérieurement par le plan $z = h$; la

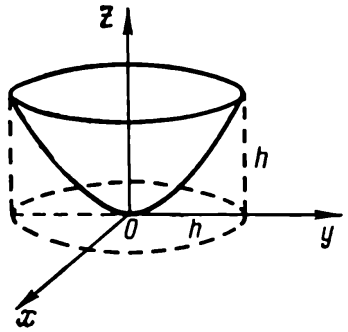

Fig. 17

projection de ce corps sur le plan xOy donne le disque $x^2 + y^2 \leqslant h^2$. On se servira des coordonnées cylindriques et l'équation du paraboloïde prendra la forme $z = \frac{\rho^2}{h}$.

Le volume du corps est

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{h}}^h dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \left(h - \frac{\rho^2}{h}\right)\rho\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4h}\right]_0^h d\varphi =$$

$$= \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{2}.$$

99. Calculer les coordonnées du centre de gravité du corps prismatique limité par les plans $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$:

S o l u t i o n. Calculons le volume du corps prismatique

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 \frac{3-x}{2}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^3 (3-x)\,dx=\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}.$$

Alors

$$\bar{x}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_1^3 \frac{3-x}{2}\,dy=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x\,(3-x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=1;$$

$$\bar{y}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 y\,dy\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dz=$$

$$=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 y\,(3-x)\,dy=\frac{4}{9}\int\limits_0^3 (3-x)\,dx=\frac{4}{9}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=2;$$

$$\bar{z}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} z\,dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}\,dx\int\limits_1^3 dy=\frac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3=\frac{1}{2}.$$

100. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

Réponse. $\frac{\pi}{6}$.

101. Calculer le volume du corps limité par le plan $z=0$, la surface cylindrique $x=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ et la sphère $x^2+y^2+z^2=4$ (à l'intérieur d'un cylindre).

Réponse. $\frac{8}{9}(3\pi-4)$.

102. Calculer la masse du cube $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ si la densité du cube au point $(x; y; z)$ est $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.

Réponse. $\frac{3a^4}{2}$.

103. Calculer les coordonnées du centre de gravité du corps limité par les surfaces $x + y = 1$, $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Réponse. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{5}$, $\bar{z} = \frac{7}{30}$.

104. Calculer les coordonnées du centre de gravité du corps limité par les surfaces $z^2 = xy$, $x = 5$, $y = 5$, $z = 0$.

Réponse. $\bar{x} = \bar{y} = 3$, $\bar{z} = \frac{45}{32}$.

105. Calculer les coordonnées du centre de gravité du corps limité par les surfaces $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et la surface cylindrique $z = \frac{1}{2}y^2$.

Réponse. $\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

106. Calculer le moment d'inertie du cube $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ par rapport à son arête.

Réponse. $\frac{2}{3}a^5$.

CHAPITRE II

INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE

§ 1. Intégrales curvilignes prises le long d'un arc et par rapport aux coordonnées

1. Intégrale curviligne prise le long d'un arc (intégrale curviligne de première espèce). Soit $f(x, y)$ une fonction définie et continue aux points de l'arc AB d'une courbe lisse K régie par l'équation $y = \varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Décomposons arbitrairement l'arc AB en n arcs élémentaires par les points $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$; soit Δs_k la longueur de l'arc $A_{k-1}A_k$. Choisissons sur chaque arc élémentaire un point arbitraire $M_k(\xi_k ; \eta_k)$ et multiplions la valeur de la fonction $f(\xi_k, \eta_k)$ en ce point par la longueur de l'arc correspondant Δs_k.

On appelle *somme intégrale* de la fonction $f(x, y)$ *prise le long de l'arc* AB une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta s_k.$$

On appelle *intégrale curviligne* de la fonction $f(x, y)$ *prise le long de l'arc* AB ou *intégrale curviligne de première espèce* la limite de la somme intégrale à condition que $\max \Delta s_k \to 0$:

$$\int_{AB} f(x, y)\, ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta s_k$$

(ds est la différentielle de l'arc).

L'intégrale curviligne de première espèce se calcule d'après la formule

$$\int_{AB} f(x, y)\, ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\, dx.$$

Si la courbe K est donnée par ses équations paramétriques

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

alors

$$\int_K f(x, y)\, ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

D'une façon analogue on détermine et calcule l'intégrale curviligne de première espèce d'une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ prise le long d'une

courbe gauche. Si la courbe gauche est donnée par les équations

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

alors

$$\int_K f(x, y, z)\, ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Si $f(x, y) > 0$, alors l'intégrale curviligne de première espèce $\int_K f(x, y)\, ds$ donne la *masse de la courbe* K de densité linéaire variable $\gamma = f(x, y)$ (interprétation physique).

Propriétés essentielles de l'intégrale curviligne de première espèce

1) *L'intégrale curviligne de première espèce est indépendante du sens de parcours du chemin d'intégration*

$$\int_{AB} f(x, y)\, ds = \int_{BA} f(x, y)\, ds.$$

2) $$\int_K [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\, ds = \int_K f_1(x, y)\, ds \pm \int_K f_2(x, y)\, ds.$$

3) $$\int_K cf(x, y)\, ds = c \int_K f(x, y)\, ds, \text{ où } c = \text{const}.$$

4) *Si la courbe d'intégration K est décomposée en deux portions K_1 et K_2, alors*

$$\int_K f(x, y)\, ds = \int_{K_1} f(x, y)\, ds + \int_{K_2} f(x, y)\, ds.$$

2. Intégrale curviligne par rapport aux coordonnées (intégrale curviligne de deuxième espèce). Soit $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions continues aux points de l'arc AB d'une courbe lisse K régie par l'équation $y = \varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

On appelle *somme intégrale* des fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ *par rapport aux coordonnées* une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k],$$

où Δx_k et Δy_k sont les projections de l'arc élémentaire sur les axes Ox et Oy.

On appelle *intégrale curviligne* de l'expression $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ *par rapport aux coordonnées*, ou *intégrale curviligne de deuxième espèce* prise le long de l'arc orienté AB, la limite de la somme intégrale à condition que $\max \Delta x_k \to 0$ et $\max \Delta y_k \to 0$:

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k].$$

L'intégrale curviligne de deuxième espèce est le *travail* accompli par la force variable $\mathbf{F} = P(x, y)\, \mathbf{i} + Q(x, y)\, \mathbf{j}$ le long du chemin curviligne AB (interprétation mécanique).

Propriétés essentielles de l'intégrale curviligne de deuxième espèce

1) *L'intégrale curviligne de deuxième espèce change de signe lorsqu'on change le sens de parcours du chemin d'intégration*:

$$\int_{BA} P\,dx+Q\,dy=-\int_{AB} P\,dx+Q\,dy,$$

2) $$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int_{AB} P\,dx+\int_{AB} Q\,dy.$$

Les autres propriétés sont analogues à celles de l'intégrale curviligne de première espèce.

L'intégrale curviligne de deuxième espèce se calcule d'après la formule

$$\int_K P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=\int_a^b [P(x,\ \varphi(x))+\varphi'(x)\,Q(x,\ \varphi(x))]\,dx.$$

Si la courbe K est donnée par ses équations paramétriques $x = x(t)$, $y = y(t)$, où $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, on a alors

$$\int_K P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=\int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t),\ y(t)]\,x'(t)+Q[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

Une formule analogue est vraie pour le calcul de l'intégrale curviligne de deuxième espèce le long d'une courbe gauche K : si la courbe est donnée par ses équations $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, où $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, alors

$$\int_K P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy+R(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,x'(t)+Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,y'(t)+$$

$$+R[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

107. Calculer $\int_K (x-y)\,ds$, où K est un segment de droite compris entre A (0; 0) et B (4; 3).

Solution. L'équation de la droite AB est $y = \frac{3}{4}x$. On a $y' = \frac{3}{4}$ et, par conséquent,

$$\int_K (x-y)\,ds=\int_0^4 \left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx=$$

$$=\frac{5}{16}\int_0^4 x\,dx=\frac{5}{32}x^2\Big|_0^4=\frac{5}{2}.$$

108. Calculer $\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx$ si $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$, $0\leqslant t\leqslant \leqslant\frac{\pi}{2}$.

Solution. Calculons $dx = -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\,dt$, $dy=\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\,dt$. Alors

$$\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t\cdot\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}+\sin t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt=\frac{\pi}{4}.$$

109. Calculer la masse M de l'arc de courbe $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ dont la densité linéaire varie suivant la loi $\gamma = \sqrt{2y}$.

Solution. On a

$$M=\int\limits_K \sqrt{2y}\,ds=\int\limits_0^1\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}t^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

110. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de cycloïde $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

Solution. Les coordonnées du centre de gravité d'un arc homogène d'une courbe K se calculent d'après les formules:

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int\limits_K x\,ds,\quad \bar{y}=\frac{1}{s}\int\limits_K y\,ds,$$

où s est la longueur de l'arc.

On a

$$s=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_2^{\pi}=4.$$

Alors

$$\bar{x}=\frac{1}{4}\int\limits_K x\,ds=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(t-\sin t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(t\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}\int\limits_K y\,ds=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{4}{3}.$$

Calculer les intégrales curvilignes :

111. $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$ si le chemin reliant $A(1;1)$ à $B(3;4)$ est un segment de droite.

Réponse. $11\frac{1}{6}$.

112. $\int\limits_K(x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$ si K est une ligne brisée OAB, où $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

Réponse. $\frac{136}{3}$.

113. $\int\limits_{AB}\frac{y\,ds}{x}$ si AB est l'arc de la parabole semi-cubique $y^2=\frac{4}{9}x^3$ reliant les points $A(3;2\sqrt{3})$ et $B\left(8;\frac{32}{3}\sqrt{2}\right)$.

Réponse. $\frac{2152}{45}$.

114. $\int\limits_K y\,dx-(y+x^2)\,dy$ si K est l'arc de la parabole $y=2x-x^2$ situé au-dessus de l'axe Ox et parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Réponse. 4.

115. $\int\limits_K y\,dx+2x\,dy$ si K est le contour d'un losange parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et dont les côtés sont les droites $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\pm 1$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\pm 1$.

Réponse. 12.

116. $\int\limits_K 2x\,dy-3y\,dx$ si K est le contour d'un triangle de sommets $A\,(1;\,2)$, $B\,(3;\,1)$, $C\,(2;\,5)$ parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Réponse. 17,5.

117. $\int\limits_K \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$ si K est le Ier quart de la circonférence $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Réponse. π.

118. $\int\limits_K x^2y\,dx+x^3\,dy$ si K est le contour limité par les paraboles $y^2=x$, $x^2=y$ et parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Réponse. $\frac{6}{35}$.

119. Calculer la masse de l'arc de circonférence $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ si la densité linéaire de cet arc au point $(x;\,y)$ est égale à y.

Réponse. 2.

120. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de courbe homogène $y=\operatorname{ch}x$ $(0\leqslant x\leqslant\ln 2)$.

Réponse. $\bar{x}=\frac{1}{3}(3\ln 2-1)$, $\bar{y}=\frac{1}{24}(16\ln 2+15)$.

121. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de courbe homogène $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty\leqslant t\leqslant 0)$.

Réponse. $\bar{x}=\frac{2}{5}$, $\bar{y}=-\frac{1}{5}$, $\bar{z}=\frac{1}{2}$.

122. Calculer $\int\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, où K est la circonférence $x^2+y^2=ax$.

Réponse. $2a^2$.

123. Calculer $\int\limits_K \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, où K est la première spire de l'hélice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

Réponse. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$.

124. Calculer la masse de la première spire de l'hélice $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, si la densité en chaque point est égale au rayon vecteur de ce point.

Réponse. $\sqrt{2}\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right.$.

125. Calculer $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, où OA est un quart de la circonférence $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$ parcouru dans le sens d'accroissement du paramètre t.

Réponse. $\frac{1}{6}$.

§ 2. Indépendance d'une intégrale curviligne de deuxième espèce du contour d'intégration. Recherche d'une fonction d'après sa différentielle totale

Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ et leurs dérivées partielles premières des fonctions continues dans un domaine simplement connexe D et soit K un contour situé entièrement dans ce domaine.

Alors la *condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne*

$$\int\limits_K P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

soit indépendante du contour d'intégration consiste à vérifier, dans le domaine D, l'identité

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Lorsque les conditions ci-dessus sont satisfaites, *l'intégrale curviligne sur tout contour fermé C intérieur au domaine D est nulle*:

$$\oint\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Pour calculer l'intégrale ne dépendant pas du contour d'intégration

$$\int\limits_{(x_0;\,y_0)}^{(x_1;\,y_1)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \left(\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

il convient de choisir en qualité de chemin d'intégration optimal une ligne brisée réunissant les points $(x_0; y_0)$ et $(x_1; y_1)$ dont les éléments sont parallèles aux axes Ox et Oy.

Dans les conditions indiquées, l'expression sous le signe d'intégration $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ est la différentielle totale d'une certaine fonction univoque $U = U(x, y)$, c'est-à-dire

$$dU(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

On peut trouver la fonction $U(x, y)$ (la primitive) en calculant l'intégrale curviligne correspondante le long d'une ligne brisée A_0A_1B, où $A_0(x_0; y_0)$ est un point fixé arbitraire, $B(x; y)$ un point variable et A_1 un point de coordonnées x et y_0. Alors, le long de A_0A_1 on a $y = y_0$ et $dy = 0$, alors que le long de A_1B on a $x = \text{const}$, $dx = 0$.

On obtient ainsi la formule suivante:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C.$$

De même, en intégrant le long de la ligne brisée A_0A_2B, où $A_2(x_0; y)$, on obtient

$$U(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + C.$$

126. Calculer $I = \int\limits_{(1;\,1)}^{(2;\,3)} (x + 3y)\,dx + (y + 3x)\,dy.$

S o l u t i o n. L'intégrale donnée ne dépend pas du contour d'intégration car

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + 3y) = 3; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y + 3x) = 3,$$

c'est-à-dire $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ (dans tout le plan xOy).

Choisissons en tant que chemin d'intégration une ligne brisée dont les éléments sont parallèles aux axes de coordonnées. On a sur la première portion $y = 1$, $dy = 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, et sur la seconde portion $x = 2$, $dx = 0$, $1 \leqslant y \leqslant 3$.

Par conséquent,

$$I = \int_1^2 (x + 3)\,dx + \int_1^3 (y + 6)\,dy = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^2 +$$

$$+ \left[\frac{y^2}{2} + 6y\right]_1^3 = 2 + 6 - \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{1}{2} - 6 = 20\frac{1}{2}.$$

127. Calculer la fonction primitive U si

$$dU = [y + \ln(x + 1)]\,dx + (x + 1 - e^y)\,dy.$$

S o l u t i o n. On a $P = y + \ln(x + 1)$; $Q = x + 1 - e^y$;

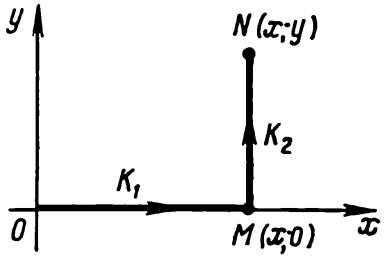

Fig. 18

$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Posons $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et le contour K est une ligne brisée OMN (fig. 18).

Alors

$$U(x, y) = \int_0^x \ln(x+1)\,dx + \int_0^y (x+1-e^y)\,dy =$$

$$= [x\ln(x+1) - x + \ln(x+1)]_0^x + [xy + y - e^y]_0^y =$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x + xy + y - e^y + 1 + C.$$

128. Calculer $U(x, y)$ si

$$dU = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy.$$

S o l u t i o n. On a

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv -\frac{1}{y^2} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ici, on ne saurait prendre le point initial à l'origine des coordonnées, car, en ce point, les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ne sont pas définies; c'est pourquoi on prendra pour point initial un point $A_0(1; 1)$. Alors

$$U(x, y) = \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = \ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1 + C.$$

Calculer la fonction primitive $U(x, y)$ à partir de sa différentielle totale :

129. $dU = [e^{x+y} + \cos(x-y)]\,dx + [e^{x+y} - \cos(x-y) + 2]\,dy.$

Réponse. $U = e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C.$

130. $dU = (1 - e^{x-y} + \cos x)\,dx + (e^{x-y} + \cos y)\,dy.$

Réponse. $U = x - e^{x-y} + \sin x + \sin y + C.$

131. $dU = (x^2 - 2xy^2 + 3)\,dx + (y^2 - 2x^2y + 3)\,dy.$

Réponse. $U = \frac{1}{3}x^3 - x^2y^2 + 3x + \frac{1}{3}y^3 + 3y + C.$

132. $dU = (2x - 3xy^2 + 2y)\,dx + (2x - 3x^2y + 2y)\,dy.$

Réponse. $U = x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + C.$

133. $dU = (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y)\,dx + (x \operatorname{sh} y + 1)\,dy.$

Réponse. $U = \operatorname{ch} x + x \operatorname{ch} y + y + C.$

134. $dU = (\arcsin x - x\ln y)\,dx - \left(\arcsin y + \frac{x^2}{2y}\right)dy.$

Réponse. $U = x\arcsin x - y\arcsin y + \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}x^2\ln y + C.$

135. Calculer $\int_{(0;0)}^{(\pi;\pi)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ sur divers contours réunissant les points $O(0; 0)$ et $M(\pi; \pi)$:

a) le long de la droite OM;
b) le long de la courbe $y = x + \sin x$;
c) le long de la ligne brisée OPM, où $P(\pi; 0)$;
d) le long de la parabole $y = \frac{x^2}{\pi}$.

Réponse. π^2 (pour tous les cas).

136. Calculer $\oint\limits_K x\,dy + y\,dx$ sur divers contours fermés:

a) le long de la circonférence $x = \cos t$; $y = \sin t$;
b) le long du contour limité par un arc de parabole $y = x^2$ et un segment de droite $y = 1$.

Réponse. 0 (pour tous les cas).

§ 3. Formule de Green

Si C est la frontière d'un domaine D et que les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles premières $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ dans le domaine fermé D (y compris la frontière C), alors la formule de Green

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

est vraie; ici, le parcours du contour C est choisi de façon que le domaine D reste à gauche.

137. Calculer $I = \oint\limits_C 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy$ en appliquant la formule de Green si C est le contour d'un triangle de sommets aux points $L(1; 1)$, $M(2; 2)$, $N(1; 3)$ parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Vérifier le résultat par une intégration immédiate.

Solution. Dans l'intégrale donnée, $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = (x + y)^2$. Par conséquent, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x + y) - 4y = 2(x - y)$. Ainsi donc, $I = \oint\limits_C 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy = \iint\limits_D 2(x - y)\,dx\,dy$, où le domaine D est le triangle LMN. L'équation de la droite LM est $y = x$; l'équation de MN est $y = -x + 4$. Calculons l'intégrale double étendue au domaine donné:

$$I = 2\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4-x} (x - y)\,dy = 2\int\limits_1^2 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_x^{4-x} dx =$$

$$= 2\int\limits_1^2 \left[x(4 - x) - \frac{1}{2}(4 - x)^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2\right] dx =$$

$$= 4\int\limits_1^2 (4x - x^2 - 4)\,dx = 4\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Calculons maintenant l'intégrale curviligne proprement dite sur le contour C constitué par les éléments LM, MN, NL:

$$I = \int\limits_{LM} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy + \int\limits_{MN} 2(x^2+y^2)\,dx +$$
$$+ (x+y)^2\,dy + \int\limits_{NL} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy.$$

L'équation de LM est $y = x$, et par conséquent, $dy = dx$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.

L'équation de MN est $y = -x + 4$, et par conséquent, $dy = -dx$, $2 \geqslant y \geqslant 1$.

L'équation de NL est $x = 1$, d'où vient que $dx = 0$, $3 \geqslant y \geqslant 1$.

Ainsi, on a

$$I = \int\limits_1^2 [2(x^2+x^2)\,dx + (x+x)^2\,dx] +$$
$$+ \int\limits_2^1 \{2[x^2+(4-x)^2]\,dx + (x-x+4)^2(-dx)\} +$$
$$+ \int\limits_3^1 (1+y)^2\,dy = 8\int\limits_1^2 x^2\,dx + \int\limits_2^1 (4x^2-16x+16)\,dx +$$
$$+ \int\limits_3^1 (1+y)^2\,dy = \left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - 16x\right]_1^2 + \frac{1}{3}(1+y)^3\Big|_3^1 = -\frac{4}{3}.$$

138. Calculer en appliquant la formule de Green

$$\oint\limits_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy,$$

où C est la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$ parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Solution. Ici, $P(x, y) = -x^2y$, $Q(x, y) = xy^2$. Alors $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$.

Par conséquent,

$$I = \oint\limits_C -x^2y\,dx + x^2y\,dy = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Introduisons les coordonnées polaires:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi;$$

$$I = \iint\limits_D \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R \rho^3\,d\rho = \frac{1}{4}R^4\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

139. En appliquant la formule de Green, transformer l'intégrale curviligne

$$I = \oint_C [x + \ln(x^2 + y^2)]\, dx + y \ln(x^2 + y^2)\, dy,$$

où le contour C limite le domaine D.

Réponse. $\iint_D \frac{2y(x-1)}{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

140. En appliquant la formule de Green, calculer l'intégrale

$$\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\, dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right] dy,$$

où C est le contour du rectangle $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Réponse. 8.

§ 4. Calcul des aires de surfaces

L'aire S d'une figure limitée par un contour fermé simple C se calcule d'après la formule

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx.$$

Le contour d'intégration est parcouru de façon que le domaine limité par ce contour reste à gauche (sens positif).

141. Calculer l'aire de la figure limitée par les courbes $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ (on a en vue l'aire d'une surface adjacente à l'origine des coordonnées; fig. 19).

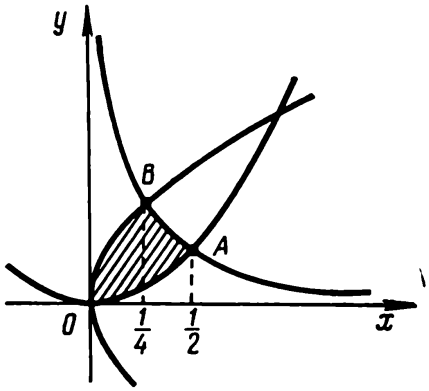

Fig. 19

S o l u t i o n. En résolvant en même temps les équations des courbes, on trouve $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

L'aire de surface cherchée est

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{OA} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{AB} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{BO} x\,dy-y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1/2} x^2\,dx-\frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{1/4}\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\limits_{1/4}^{0}\sqrt{x}\,dx=\frac{1+3\ln 2}{24}\approx 0{,}13.$$

142. Calculer l'aire de la surface limitée par l'astroïde $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, ayant préalablement construit la courbe.

Solution. L'aire de surface s'exprimera par l'intégrale:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{C} x\,dy-y\,dx,$$

où $dy = 3a\sin^2 t\cos t\,dt$, $dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. D'où il vient

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\sin^2 t+3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3a^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{16}a^2\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

143. Calculer l'aire de surface limitée par les paraboles $y^2 = x$, $x^2 = y$.

Réponse. $\frac{1}{3}$.

144. Calculer l'aire de surface limitée par l'ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Réponse. πab.

145. Calculer l'aire du rectangle de sommets A (6; 1), B (4; 5), C (1; 6), D (—1; 1).

Réponse. $\frac{45}{2}$.

146. Calculer l'aire de la figure limitée par le contour $OABCO$ si A (1; 3), B (0; 4), C (—1; 2), O (0; 0), OA, BC, CO sont des segments de droites, AB étant l'arc de parabole $y = 4 - x^2$.

Réponse. $\frac{25}{6}$.

147. Calculer l'aire de surface limitée par la cardioïde

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t,\quad y = 2r\sin t - r\sin 2t.$$

Réponse. $6\pi r^2$.

§ 5. Intégrales de surface

Soient $F(x, y, z)$ une fonction continue et $z = f(x, y)$ une surface lisse S, où $f(x, y)$ est donnée dans un certain domaine D du plan xOy. On appelle *intégrale de surface de première espèce* la limite d'une somme intégrale de la forme

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta S_k = \iint_S F(x, y, z)\, dS,$$

où ΔS_k est l'aire du k-ième élément de la surface S, $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$ est un point appartenant à cet élément, d_k est le diamètre de cet élément, $F(x, y, z)$ étant définie en chaque point de la surface S.

La valeur de cette intégrale est indépendante du choix de la face de la surface S sur laquelle s'effectue l'intégration.

Si la projection D de la surface S sur le plan xOy est univoque, alors l'*intégrale de surface de première espèce correspondante se calcule d'après la formule*

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS =$$

$$= \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Si $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sont des fonctions continues et que S^+ est la face de la surface lisse S, définie par la direction de la normale n ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), alors l'*intégrale de surface de deuxième espèce* correspondante s'exprime comme suit :

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Lors du passage à l'autre face S^- de la surface, cette intégrale change de signe.

Si la surface S est donnée sous forme implicite $\Phi(x, y, z) = 0$, alors les cosinus directeurs de la normale à cette surface sont définis par les formules :

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

où le signe devant le radical doit concorder avec la face considérée de la surface.

Les *moments d'inertie d'une portion de la surface* par rapport aux axes de coordonnées s'expriment par les intégrales de surface:

$$I_{Ox}=\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dS,\quad I_{Oy}=\iint\limits_S (x^2+z^2)\,dS,\quad I_{Oz}=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS.$$

On peut calculer les *coordonnées du centre de gravité d'une portion de surface* d'après les formules:

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_S x\,dS,\quad \bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_S y\,dS,\quad \bar{z}=\frac{1}{S}\iint\limits_S z\,dS,$$

où S est l'aire de la portion de surface donnée.

148. Calculer $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, où S est une portion de surface conique $z^2=x^2+y^2$ contenue entre les plans $z=0$ et $z=1$.

Solution. On a:

$$z=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\cdot dx\,dy.$$

L'intégrale cherchée se ramène alors à l'intégrale double

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Le domaine d'intégration D est le disque $x^2+y^2\leqslant 1$, d'où il vient

$$I=\sqrt{2}\cdot\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=4\sqrt{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int\limits_0^1 \rho^3\,d\rho=\sqrt{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

149. Calculer le moment d'inertie de l'hémisphère $z=+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ par rapport à l'axe Oz.

Solution. On a:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$I_{Oz}=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

Le domaine d'intégration est la projection de l'hémisphère sur le plan xOy, c'est-à-dire le disque $x^2+y^2\leqslant a^2$, d'où, en passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$I_{Oz}=\iint\limits_D \rho^2\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta=4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int\limits_0^a \frac{\rho^3\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=\frac{4}{3}\pi a^4$$

(on peut calculer l'intégrale intérieure à l'aide de la substitution $\rho=a\sin t$).

150. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la portion

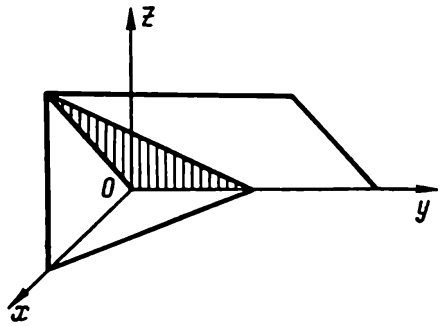

Fig. 20

du plan $z=x$ limitée par les plans $x+y=1$, $y=0$, $x=0$ (fig. 20).

S o l u t i o n. Calculons l'aire S de la portion donnée du plan $z=x$. On a $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, et par conséquent,

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^1 (1-x)\,dx=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^2\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Alors

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_S x\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{1-x}\sqrt{2}\,dy=$$

$$=2\int\limits_0^1 x(1-x)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_S y\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\sqrt{2}\,y\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1(1-x)^2\,dx=-\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3};$$

$$\bar{z}=\frac{1}{S}\iint\limits_S z\,dS=\frac{1}{S}\iint\limits_S x\,dS=\frac{1}{3}$$

(on a fait usage de l'équation du plan $z=x$).

151. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la portion de la surface $z=2-\frac{x^2+y^2}{2}$ située au-dessus du plan xOy.

Réponse. $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{307-15\sqrt{5}}{310}$.

152. Calculer le moment d'inertie du paraboloïde $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ par rapport à l'axe Oz pour $0\leqslant z\leqslant 1$.

Réponse. $I_{Oz}=\frac{4\pi}{15}(1+6\sqrt{3})$.

153. Calculer $\iint\limits_S xyz\,dS$, où S est la portion de la surface $z=x^2+y^2$ située entre les plans $z=0$ et $z=1$.

Réponse. $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

§ 6. Formules de Stokes et d'Ostrogradski-Gauss. Eléments de la théorie du champ

Si les fonctions $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles premières sur une surface S et que C est un contour fermé limitant la surface S, alors on a la *formule de Stokes*

$$\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface S; le sens de la normale se définit de façon que, vu du côté de la normale, le contour C soit parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Si les fonctions $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles premières dans un domaine fermé T de l'espace limité par une surface lisse S, on a alors la *formule d'Ostrogradski-Gauss*

$$\oiint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface S.

Si un vecteur variable $\mathbf{F}$ est une fonction vectorielle du point de l'espace:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \text{où } M(x\ y, z), \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

alors ce vecteur définit un *champ vectoriel*. Exprimé en coordonnées, il va s'écrire:

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

où $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ sont les projections du vecteur $\mathbf{F}$ sur les axes de coordonnées.

On appelle *divergence* du champ vectoriel $\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ le scalaire

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

On appelle *rotationnel* du champ vectoriel $\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ le vecteur

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

On appelle *flux* du champ vectoriel $\mathbf{F}(M)$ à travers une surface S dans le sens défini par le vecteur unitaire de la normale $\mathbf{n} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\beta\cdot\mathbf{j} + \cos\gamma\cdot\mathbf{k}$ à la surface S, l'intégrale de surface

$$\iint_S \mathbf{F}\mathbf{n}\,dS = \iint_S F_n\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

La *formule d'Ostrogradski-Gauss sous forme vectorielle est de la forme*

$$\oiint F_n\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

On appelle *intégrale linéaire* du vecteur $\mathbf{F}$ prise le long d'une courbe K l'intégrale curviligne

$$\int_K \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

représentant le *travail* accompli par le champ vectoriel le long de la courbe K. Si le contour C est fermé, alors l'intégrale linéaire

$$\oint_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

est appelée *circulation* du champ vectoriel $C(M)$ le long du contour C.

La *formule de Stokes sous forme vectorielle* est

$$\oint_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\,dS.$$

154. Calculer l'intégrale $\oiint\limits_S [x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma]\, dS$, étendue à la surface d'un corps quelconque.

Solution. D'après la formule d'Ostrogradski-Gauss, on a

$$\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = 3\iiint\limits_V dx\, dy\, dz = 3V,$$

où V est le volume du corps.

155. En appliquant la formule d'Ostrogradski-Gauss, transformer l'intégrale de surface

$$\oiint \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\, dz + \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dz + \frac{\partial u}{\partial z}\, dx\, dy$$

en une intégrale de volume.

Solution. On peut écrire l'intégrale donnée de la manière suivante :

$$\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\, dz + \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dz + \frac{\partial u}{\partial z}\, dx\, dy =$$

$$= \oiint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS,$$

la dernière intégrale, d'après la formule d'Ostrogradski-Gauss, étant

$$\iiint\limits_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

Par conséquent,

$$\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\, dz + \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dz + \frac{\partial u}{\partial z}\, dx\, dy =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

156. Calculer $I = \oint\limits_C x^2y^3\, dx + dy + z\, dz$, en appliquant la formule de Stokes si C est la circonférence $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

S o l u t i o n. D'après la formule de Stokes

$$I = \oint_C x^2y^3\,dx + dy + z\,dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

où

$$P = x^2y^3, \quad Q = 1, \quad R = z.$$

Par conséquent, le deuxième membre se présente comme suit

$$-\iint_S 3x^2y^2\cos\gamma\,dS,$$

où $dS\cos\gamma = dx\,dy$. Ainsi donc, on a

$$I = -3\iint_D x^2y^2\,dx\,dy.$$

En posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, on a

$$I = -3\iint_D \rho^5\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = -12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^r \rho^5\,d\rho =$$

$$= -2r^6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{r^6}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{r^6}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\,d\theta = -\frac{r^6}{4}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi r^6}{8}.$$

157. Calculer le flux du vecteur **r** (**r** est le rayon vecteur du point) à travers la face extérieure de la surface d'un cylindre droit circulaire si l'origine des coordonnées se confond avec le centre de la base inférieure du cylindre, R étant le rayon de base du cylindre et h sa hauteur (fig. 21).

S o l u t i o n. Pour calculer le flux du vecteur **r** à travers la face extérieure de la surface du cylindre, il suffit de calculer le flux du vecteur **r** à travers la base inférieure, la surface latérale et la base supérieure du cylindre.

On a $Q_{b.i} = \iint_S r_n\,dS$, mais la projection du rayon vecteur **r** sur la normale extérieure à la base du cylindre est nulle, d'où vient que $Q_{b.i} = 0$.

La projection du rayon vecteur sur la normale à la surface latérale est égale au rayon de base du cylindre, c'est-à-dire $r_n = R$. Alors $Q_{s.l} = \iint\limits_S R\,dS = R \cdot S_{s.l} = 2\pi R^2 h$.

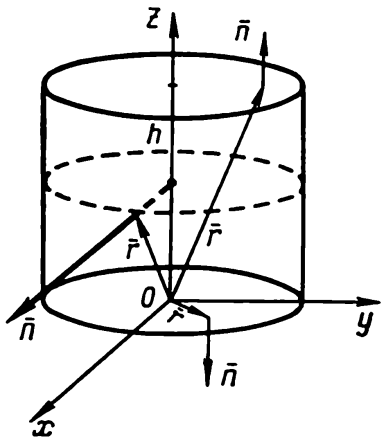

Fig.21

La projection du rayon vecteur sur la normale à la base supérieure est égale à h, d'où il vient

$$Q_{b.\,s} = h \cdot \iint\limits_S dS = h \cdot S_b = \pi R^2 h.$$

Ainsi, le flux du vecteur **r** à travers la face extérieure du cylindre est

$$Q = 2\pi R^2 h + \pi R^2 h = 3\pi R^2 h.$$

158. Calculer la divergence du champ vectoriel $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

Solution. On a par définition $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$, où $A_x = x^2$, $A_y = y^2$, $A_z = z^2$.

Ainsi, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 2(x + y + z)$.

159. Calculer la circulation du vecteur $\mathbf{A} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ suivant la circonférence $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ dans le sens positif.

Solution. La circulation du vecteur $\mathbf{A} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ est

$$\oint\limits_C \mathbf{A}\,d\mathbf{r} = \oint\limits_C -\omega y\,dx + \omega x\,dy = \omega \int\limits_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)\,dt = 2\pi a^2 \omega.$$

160. Montrer que rot (grad u) $= 0$, c'est-à-dire le rotationnel du gradient de n'importe quel scalaire est nul.

S o l u t i o n. Vu le fait que les projections du vecteur du gradient sont les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, alors

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right) -$$

$$-\mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right) = 0.$$

161. En appliquant la formule de Stokes, calculer l'intégrale curviligne $\oint\limits_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, où C est la circonférence $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

Réponse. 0.

162. Calculer l'intégrale $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,dS$ prise sur la surface de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$, où α, β, γ sont les angles formés par la normale extérieure avec les axes de coordonnées.

Réponse. $\frac{12}{5}\pi a^5$.

163. Calculer l'intégrale

$$\iint\limits_S [(z^2-y^2)\cos\alpha + (x^2-z^2)\cos\beta + (y^2-x^2)\cos\gamma]\,dS$$

prise sur la face extérieure de la surface de la demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

Réponse. 0.

164. Calculer $\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$, où S est la face extérieure de la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Réponse. $4\pi abc$.

165. Calculer $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, où S est la face extérieure de la surface du cylindre $x^2+y^2=a^2$ $(-h \leqslant x \leqslant h)$.

Réponse. $6\pi a^2 h$.

166. Calculer le flux du vecteur $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ à travers la surface latérale du cône $x^2+y^2 \leqslant \frac{R^2}{h^2}z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

Réponse. $\frac{1}{10}\pi R^2 h\,(3R^2+2h^2)$.

167. Calculer la divergence propre au gradient de la fonction $u = e^{x+y+z}$.

Réponse. div (grad u) $= 3u$.

168. Calculer div $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, où $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

Réponse. div $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = x + y + z$.

169. Calculer le flux du rayon vecteur $\mathbf{r}$ à travers la face extérieure de la surface d'un cône droit circulaire, si h est la hauteur du cône, R étant le rayon de sa base.

Réponse. $Q = \pi R^2 h$.

170. Calculer la circulation du vecteur $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ sur la circonférence $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Réponse. 2π.

171. Calculer la circulation du vecteur $\mathbf{u} = (x + z)\,\mathbf{i} + (x - y)\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Réponse. πab.

172. Calculer rot $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{r}$, où $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Réponse. $-[(y - z)\,\mathbf{i} + (z - x)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}]$.

173. Calculer rot $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b}$, où $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Réponse. $2\,(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

174. Montrer que div $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}$ rot $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ rot $\mathbf{b}$.

175. Montrer que div $(f\mathbf{A}) = f$ div $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ grad f.

CHAPITRE III

SÉRIES

§ 1. Séries numériques

Considérons une suite numérique infinie $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, où $u_n = f(n)$. L'expression

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

est appelée *série numérique* infinie, les nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ étant les *termes* de cette série; $u_n = f(n)$ est appelé *terme général*. Bien souvent la série s'écrit sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

La somme des n premiers termes d'une série est désignée par S_n et est appelée n-ième *somme partielle de la série*:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

La série est dite *convergente* si sa n-ième somme partielle S_n tend vers une limite finie en cas d'un accroissement infiniment grand de n, c'est-à-dire si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Le nombre S est appelé *somme* de la série. Si toutefois pour $n \to \infty$ la n-ième somme partielle de la série ne tend pas vers une limite finie, on dit que la série est *divergente*.

La série constituée par les termes d'une progression géométrique décroissante quelconque

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \qquad (|q| < 1)$$

est une série convergente dont la somme est $\frac{a}{1-q}$.

La série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

appelée série *harmonique*, diverge.

Citons les principaux théorèmes sur les séries numériques convergentes.

1. *Si la série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

converge, alors la série

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots,$$

obtenue à partir de la série donnée en supprimant m premiers termes, converge elle aussi (cette dernière série est appelée *m-ième reste* de la série initiale), et inversement, *de la convergence du m-ième reste il résulte la convergence de la série donnée.*

2. *Si la série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

converge et a pour somme le nombre S, alors la série

$$au_1 + au_2 + au_3 + \ldots$$

converge elle aussi, la somme de cette dernière série étant égale à aS.

3. *Si les séries*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \text{et} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

dont les sommes sont respectivement S et σ convergent, alors la série

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$$

converge elle aussi, la somme de cette dernière série étant égale à $S + \sigma$.

4. *Si la série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, c'est-à-dire pour $n \to \infty$ la limite du terme général d'une série convergente est nulle (critère nécessaire de convergence d'une série).

Ainsi donc, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série diverge.

Enumérons les critères essentiels de convergence et de divergence des séries à termes positifs.

Premier critère de comparaison. *Soient données deux séries à termes positifs:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

et

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$

chacun des termes de la série (1) *n'étant pas supérieur au terme correspondant de la série* (2), *c'est-à-dire que $u_n \leqslant v_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Alors, si la série* (2) *converge, la série* (1) *converge elle aussi; si la série* (1) *est divergente, la série* (2) *l'est aussi.*

Ce critère reste valable, si les inégalités $u_n < v_n$ sont vérifiées non pas pour tous les n, mais seulement à partir d'un certain numéro $n = N$.

Deuxième critère de comparaison. *S'il existe une limite finie et différente de zéro $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, alors les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent ou divergent simultanément.*

Critère de Cauchy. *Si pour la série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

il existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$, alors cette série converge si $C < 1$ et diverge si $C > 1$.

Critère de d'Alembert. *Si pour la série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

il existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, alors cette série converge pour $D < 1$ et diverge lorsque $D > 1$.

Critère intégral. *Si $f(x)$ est une fonction continue, positive et monotone décroissante pour $x \geqslant 1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, où $u_n = f(n)$, converge ou diverge selon que l'intégrale $\int^{\infty} f(x)\,dx$ converge ou diverge.*

Considérons maintenant les séries dont les termes sont de signes opposés.

On appelle *série à termes alternés* une série de la forme

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

où $u_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Critère de convergence d'une série à termes alternés (critère de Leibniz). *Une série à termes alternés converge si les valeurs absolues de ces termes vont en décroissant et que le terme général tend vers zéro*, c'est-à-dire si les conditions suivantes sont vérifiées: 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ et 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Prenons la n-ième somme partielle d'une série à termes alternés pour laquelle le critère de Leibniz est vérifié:

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n.$$

Soit R_n le n-ième reste de la série. Il peut être écrit comme la différence entre la somme de la série S et la n-ième somme partielle S_n, c'est-à-dire

$$R_n = S - S_n.$$

Il est facile de voir que

$$R_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots).$$

La valeur de $|R_n|$ est évaluée à l'aide de l'inégalité

$$|R_n| < u_{n+1}.$$

Arrêtons-nous maintenant sur certaines propriétés des séries alternées (c'est-à-dire des séries à termes alternés et des séries à termes de signes quelconques).

La série alternée

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

converge si la série

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$$

converge elle aussi.

Dans ce cas, la série initiale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est dite *absolument convergente*.

La série convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est dite *semi-convergente* si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge.

Si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absolument, alors la série obtenue après la permutation arbitraire d'une infinité de ses termes convergera absolument et aura la même somme que la série initiale.

Si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est semi-convergente, alors, après une permutation d'une infinité de ses termes la somme peut changer. En particulier, en regroupant d'une façon appropriée une série semi-convergente, on peut notamment la transformer en une série divergente.

Si les séries $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ et $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ convergent absolument et ont respectivement pour sommes S_1 et S_2, alors la série

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + v_1u_2) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots$$
$$\ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots$$

converge absolument elle aussi.

On appelle cette série *produit* des séries

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \text{et} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

Sa somme est égale à $S_1 \cdot S_2$.

176. Soit donné le terme général $u_n = \frac{n}{10^n + 1}$ d'une série. Ecrire les quatre premiers termes de la série.

Solution. Si $n = 1$, alors $u_1 = \frac{1}{11}$,

si $n = 2$, alors $u_2 = \frac{2}{101}$,

si $n = 3$, alors $u_3 = \frac{3}{1001}$,

si $n = 4$, alors $u_4 = \frac{4}{10001}$,

. . . . . .

On peut écrire cette série sous la forme

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots$$

177. Calculer le terme général de la série

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots$$

Solution. Les numérateurs successifs forment la progression arithmétique 1, 3, 5, 7, . . .; trouvons le n-ième terme de cette progression d'après la formule $a_n = a_1 + d(n - 1)$. Ici, $a_1 = 1$, $d = 2$, d'où $a_n = 2n - 1$. Les dénominateurs successifs forment la progression géométrique 2, 2^2, 2^3, 2^4, . . .; le n-ième terme de cette progression est $b_n = 2^n$.

Par conséquent, le terme général de la série est $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

178. Calculer le terme général de la série

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots$$

Solution. La puissance de chaque terme coïncide avec le numéro d'ordre de ce terme, d'où vient que la puissance du n-ième terme est égale à n. Les numérateurs des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{15}$, . . . forment une progression arithmétique de premier terme 2 et de raison 1. C'est pourquoi le n-ième numérateur est égal à $n + 1$.

Les dénominateurs forment une progression arithmétique de premier terme 3 et de raison 4. Par conséquent, le n-ième dénominateur est égal à $4n - 1$.

Ainsi, le terme général de la série est $u_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$.

179. Calculer la somme de la série $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$.

Solution. On a $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Etant donné que

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

alors

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),$$
$$u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),$$
$$u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),$$
$$u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Etant donné que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, alors la série converge et a pour somme $\frac{1}{2}$.

180. Calculer la somme de la série $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$.

Solution. Mettons le terme général $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ de la série sous forme d'une somme de fractions élémentaires:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

En multipliant par le dénominateur du premier membre, on obtient l'identité

$$1\equiv A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1).$$

En posant ici successivement $n=0,\ -1,\ -2$, on trouve:
pour $n=0$: $1=2A$; $A=1/2$,
pour $n=-1$: $1=-B$; $B=-1$,
pour $n=-2$: $1=2C$; $C=1/2$.

Donc,

$$u_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2},$$

c'est-à-dire

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

D'où il vient

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right),$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right),$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right),$$

et

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$; par conséquent, la série converge et a pour somme $\frac{1}{4}$.

181. Etudier la convergence de la série

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \ldots.$$

S o l u t i o n. La série est constituée par les termes d'une progression géométrique infiniment décroissante et, pour cette raison, elle converge.

Calculons la somme de la série. Ici, $a = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{2}$ (raison de la progression). D'où il vient

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

182. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \ldots.$$

Solution. La série proposée est obtenue par suppression des dix premiers termes d'une série harmonique. D'où vient qu'elle diverge.

183. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\dots .$$

Solution. Calculons le terme général $u_n = \frac{n}{3n-1}$ de la série.

Vu le fait que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, la série diverge (la condition nécessaire n'est pas satisfaite).

184. Etudier la convergence de la série

$$0{,}6 + 0{,}51 + 0{,}501 + 0{,}5001 + \dots .$$

Solution. Ici $u_n = 0{,}5 + (0{,}1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0{,}5 \neq 0$ et la série diverge.

185. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Solution. Les termes de la série proposée sont plus petits que les termes correspondants de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, c'est-à-dire de la série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$. Mais la dernière série converge comme une progression géométrique infiniment décroissante.

Par conséquent, la série proposée converge elle aussi.

186. Etudier la convergence de la série

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\dots, \text{ si } p<1.$$

Solution. Les termes de cette série, à commencer par le deuxième, sont plus grands que les termes correspondants d'une série harmonique. Par conséquent, la série proposée diverge.

187. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{4\cdot 2^n-3}$$

Solution. Comparons cette série à celle dont le terme général est $v_n = \frac{1}{2^n}$ (c'est-à-dire à une progression géométrique infini-

ment décroissante). Appliquons le deuxième critère de comparaison des séries :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4\cdot 2^n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{4}.$$

Vu que la limite est finie et différente de zéro et que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge, la série donnée converge elle aussi.

188. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots$$

Solution. Ici $u_n=\frac{1}{3n-1}$. Comparons la série en question à la série harmonique dont $v_n=\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}.$$

Par conséquent, la série donnée diverge.

189. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$$

Solution. On a $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Dans ce cas, il est commode d'appliquer le critère de Cauchy, car $\sqrt[n]{u_n}=\frac{n}{2n+1}$, alors que la limite de la fraction $\frac{n}{2n+1}$ se calcule aisément :

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2};$$

étant donné que $C=\frac{1}{2}<1$, la série converge.

190. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Solution. Appliquons à nouveau le critère de Cauchy :

$$u_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\quad \sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}e;$$

étant donné que $C>1$, la série diverge.

191. Etudier la convergence de la série

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\ldots+\frac{2^n}{n^{10}}+\ldots$$

Solution. Appliquons le critère de d'Alembert:

$$u_n=\frac{2^n}{n^{10}},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}},\quad D=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}=2.$$

Etant donné que $D>1$, la série diverge.

192. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\sqrt{3}}+\ldots$$

Solution. Ici $u_n=\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}$, $u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{\frac{n+1}{2}}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n\sqrt{3}}$.

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\sqrt{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad D<1.$$

Par conséquent, la série converge.

193. Etudier la convergence de la série

$$\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots$$

Solution. On a $u_n=\frac{10^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{10}{n+1}$, $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0$; $D<1$. Donc, la série converge.

194. Etudier la convergence de la série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

Solution. On a $u_n=\frac{1}{n^2}$, $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2}{(1+n)^2}=$ $=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$, $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1$. Vu que $D=1$, le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure si la série converge ou qu'elle diverge.

Appliquons le critère intégral: $u_n=\frac{1}{n^2}$, d'où vient que $f(x)=$ $=\frac{1}{x^2}$, $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^\infty=1$. L'intégrale converge (elle est une grandeur finie) et, pour cette raison, la série donnée converge elle aussi.

195. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots$$

S o l u t i o n. Appliquons le critère intégral:

$$u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},\quad f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)},$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int_1^\infty \frac{\frac{dx}{x+1}}{\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\Big|_1^\infty=\infty.$$

L'intégrale diverge, la série donnée diverge elle aussi.

196. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots$$

S o l u t i o n. Appliquons le critère de Leibniz. Vu le fait que

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\quad \frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+\frac{1}{3}},\quad \frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+\frac{1}{4}},\ \ldots,$$

alors

$$\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2+1}>\frac{3}{3^2+1}>\frac{4}{4^2+1}>\ldots$$

Par conséquent, la première condition du critère de Leibniz est vérifiée. Etant donné que $u_n=\frac{n}{n^2+1}$, on a

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0,$$

c'est-à-dire que la seconde condition est également vérifiée. La série converge.

197. Etudier la convergence de la série

$$1{,}1-1{,}01+1{,}001-1{,}0001+\ldots$$

S o l u t i o n. La première condition du critère de Leibniz est remplie:

$$1{,}1>1{,}01>1{,}001>1{,}0001>\ldots;$$

d'autre part,

$$u_n=1+\frac{1}{10^n},\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1.$$

Vu le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$, la condition nécessaire de la convergence de la série n'est pas vérifiée. La série diverge.

198. Etudier la convergence de la série

$$1-1+1-1+\ldots$$

S o l u t i o n. Le terme général de la série ne tend pas vers zéro, donc, la série diverge.

199. Etudier la convergence de la série

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$$

S o l u t i o n. Formons une série à partir des valeurs absolues

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$$

Cette série est une progression géométrique infiniment décroissante et, par conséquent, converge. Ainsi, la première série converge également et ceci, de façon absolue.

200. Calculer le produit des séries absolument convergentes

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots$$

et

$$1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots$$

S o l u t i o n. Le produit des séries données (en appliquant la définition citée à la page 63) est la série

$$1+\left(\frac{2}{1!}+\frac{3}{1!}\right)+\left(\frac{2^2}{2!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}\right)+$$
$$+\left(\frac{2^3}{3!}+\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}\right)+\ldots,$$

ou

$$1+\frac{1}{1!}(2+3)+\frac{1}{2!}(2^2+2\cdot2\cdot3+3^2)+$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot(2^3+3\cdot2^2\cdot3+3\cdot2\cdot3^2+3^3)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left[2^n+\frac{n!}{(n-1)!\cdot1!}\cdot2^{n-1}\cdot3+\frac{n!}{(n-2)!\cdot2!}\cdot2^{n-2}\cdot3^2+\ldots+3^n\right]+\ldots$$

Etant donné que

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=C_n^k \quad (k=1,2,\ldots),$$

on peut mettre la série sous la forme

$$1+\frac{2+3}{1!}+\frac{(2+3)^2}{2!}+\frac{(2+3)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2+3)^n}{3!}+\ldots,$$

ou

$$1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\ldots+\frac{5^n}{n!}+\ldots$$

201. Ecrire les quatre premiers termes de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+n}$.

Réponse. $\frac{1}{11}+\frac{2}{102}+\frac{3}{1003}+\frac{4}{10004}+\ldots$

202. Ecrire les quatre premiers termes de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{100^n-1}$.

Réponse. $\frac{1}{11}+\frac{1}{1111}+\frac{1}{111111}+\frac{1}{11111111}+\ldots$

203. Etablir la formule du terme général de la série

$$\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+\ldots$$

Réponse. $\frac{10^n}{2n+5}$.

204. Idem pour $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$

Réponse. $\frac{2n-1}{2n}$.

205. Idem pour $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

Réponse. $\frac{2^n}{n!}$.

206. Idem pour $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$

Réponse. $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Calculer la somme de la série:

207. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$

Réponse. 1.

208. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Réponse. 1.

209. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots$

Réponse. $\frac{1}{12}$.

210. $1+\frac{m-1}{m}+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\ldots\ (m>1)$.

Réponse. m.

211. En appliquant le critère nécessaire, montrer que la série $\frac{1}{9}+\frac{2}{19}+\frac{3}{29}+\frac{4}{39}+\ldots$ diverge.

212. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2^n+1)^2}$ diverge.

Etudier la convergence des séries en appliquant le premier critère de comparaison des séries:

213. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$

Réponse. La série est divergente.

214. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$.

Réponse. La série est convergente.

Etudier la convergence des séries en appliquant le deuxième critère de convergence des séries:

215. $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\ldots$

Indication. Comparer avec la série $\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots$

Réponse. La série est convergente.

216. $\frac{1}{2\cdot 1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4-1}+\ldots$

Réponse. La série est divergente.

En appliquant le critère de Cauchy, étudier la convergence des séries:

217. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

Réponse. La série est convergente.

218. $3+(2{,}1)^2+(2{,}01)^3+(2{,}001)^4+\ldots$

Réponse. La série est divergente.

En appliquant le critère de d'Alembert, étudier la convergence des séries:

219. $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5+\left(\frac{10}{11}\right)^4\cdot 4^5+\ldots$

Réponse. La série est convergente.

220. $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4^5}+\ldots$

Réponse. La série est divergente.

En appliquant le critère intégral, étudier la convergence des séries :

221. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ si $p > 1$.

Réponse. La série est convergente.

222. $\frac{1}{9 \ln 9} + \frac{1}{19 \ln 19} + \frac{1}{29 \ln 29} + \ldots$

Réponse. La série est divergente.

Etudier la convergence des séries alternées et établir la nature de la convergence (absolument convergente, semi-convergente) :

223. $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \ldots$

Réponse. La série est divergente.

224. $1{,}1 - 1{,}02 + 1{,}003 - 1{,}0004 + \ldots$

Réponse. La série est divergente.

225. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot(-1)^{n-1}}{n^2+n+1}$.

Réponse. La série est semi-convergente.

226. $\frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} - \frac{13}{10^3} + \frac{19}{10^4} + \frac{25}{10^5} - \frac{31}{10^6} + \ldots$

Réponse. La série est absolument convergente.

227. $3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8} - 3\frac{1}{16} + 3\frac{1}{32} + 3\frac{1}{64} - 3\frac{1}{128} - 3\frac{1}{256} + \ldots$

Réponse. La série est divergente.

Etudier la convergence des séries :

228. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Réponse. La série est semi-convergente.

229. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$

Réponse. La série est absolument convergente.

230. $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \ldots$

Réponse. La série est divergente.

231. $\frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{28} + \frac{1}{38} + \ldots$

Réponse. La série diverge (comparer avec la série de l'exemple précédent).

232. $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \ldots$

Réponse. La série est convergente.

233. $\frac{1!}{5}+\frac{2!}{5^2}+\frac{3!}{5^3}+\ldots$

Réponse. La série est divergente.

234. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots$

Réponse. La série est convergente.

235. $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$

Réponse. La série est convergente.

236. $\frac{1}{2\ln 2\cdot\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\cdot\ln\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4\cdot\ln\ln 4}+\ldots$

Réponse. La série est divergente.

237. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{3^3+1}+\frac{1}{4^3+1}+\ldots$

Réponse. La série est convergente.

238. $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\ldots$

Réponse. La série est absolument convergente.

239. $1-2+3-4+5-6+\ldots$

Réponse. La série est divergente.

240. $1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\ldots$

Réponse. La série est absolument convergente.

241. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\ldots$

Réponse. La série diverge.

242. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$

Réponse. La série est absolument convergente.

243. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots$

Réponse. La série est semi-convergente.

244. Calculer le produit des séries absolument convergentes $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ et $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$

Réponse. $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\ldots$

245. Montrer que la série $1-\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\ldots$ est absolument convergente et l'élever au carré (la multiplier par elle-même).

Réponse. $1-\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\ldots$

§ 2. Séries de fonctions

La série

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions de x est appelée *série de fonctions*. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les fonctions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ sont définies et la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge s'appelle *domaine de convergence* de cette série de fonctions. Le domaine de convergence d'une série de fonctions est le plus souvent représenté par un certain intervalle de l'axe Ox. A chacune des valeurs appartenant au domaine de convergence X il correspond une valeur déterminée de la grandeur $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} u_n(x)$. Appelons cette grandeur, qui est fonction de x, *somme* de la série de fonctions et désignons-la par $S(x)$.

Mettons $S(x)$ sous la forme $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, où $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, $R_n(x) + u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$ ($R_n(x)$ étant le reste de la série de fonctions).

La série de fonctions convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ est dite *uniformément convergente* dans un certain domaine X si pour tout $\varepsilon > 0$, pris aussi petit que l'on veut, on peut trouver un entier positif N tel que, pour $n \geqslant N$, l'inégalité $|R_n(x)| < \varepsilon$ soit satisfaite, quel que soit x appartenant au domaine X. Il est bon d'avoir en vue que la somme $S(x)$ de la série uniformément convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dans le domaine X, où $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont des fonctions continues, est une fonction continue.

Formulons le critère suffisant de convergence uniforme d'une série de fonctions (critère de Weierstrass).

Si dans un certain domaine X les fonctions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ ne sont pas plus grandes en valeur absolue que les nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, et que la série numérique

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

converge, alors la série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$$

converge uniformément dans ce domaine.

Pour conclure, formulons deux théorèmes se rapportant à l'intégration et à la dérivation des séries de fonctions.

1. *Si la série $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$, où $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots$ sont des fonctions continues, converge uniformément dans un certain domaine X et a pour somme $S(x)$, alors la série*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \ldots$$

converge et a pour somme $\int_a^b S(x)\,dx$, le segment $[a, b]$ appartenant au domaine X.

2. Soient $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots$ des fonctions définies dans un certain domaine X, dans lequel elles admettent les dérivées $u_1'(x), u_2'(x), u_3'(x), \ldots$.

Si, dans ce domaine, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ *converge uniformément, alors sa somme est égale à la dérivée de la somme de la série initiale :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}'_x.$$

246. Soit donnée la série de fonctions

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \dots .$$

Etudier la convergence de cette série aux points $x=0$, $x=1$.

Solution. Au point $x=0$, on obtient la série

$$2 + \frac{1}{3}\cdot 2^2 + \frac{1}{5}\cdot 2^3 + \frac{1}{7}\cdot 2^4 + \dots .$$

Ici

$$u_n = \frac{2^n}{2n-1}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1}.$$

Appliquons le critère de d'Alembert :

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2,$$

c'est-à-dire $D > 1$. Par conséquent, la série diverge.

Au point $x=1$, on obtient la série

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3} + \dots .$$

Ici

$$u_n = \frac{1}{3^n(2n-1)}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}\cdot(2n+1)};$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot(2n-1)}{3^{n+1}\cdot(2n+1)} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3},$$

c'est-à-dire la série converge.

247. Calculer le domaine de convergence de la série

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \dots .$$

Solution. Calculons le terme général $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}}$ de la série. Si $|x| < 1$, alors $\lim_{n\to x} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1$; vu le fait

que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, la série diverge. Si $|x| = 1$, on obtient également la série divergente $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$.

Si $|x| > 1$, alors les termes de la série proposée sont plus petits que les termes de la progression géométrique infiniment décroissante $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots$, c'est-à-dire que la série converge.

Ainsi donc, le domaine de convergence de la série est défini par l'inégalité $|x| > 1$. Il en résulte que la série converge si $1 < x + \infty$ ou $-\infty < x < -1$.

248. Montrer que la série

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^4+2} + \frac{1}{x^6+3} - \frac{1}{x^8+4} + \ldots$$

converge uniformément pour toutes les valeurs de x $(-\infty < x < \infty)$.

S o l u t i o n. Vu le fait que la série converge d'après le critère de Leibniz pour tout x, son reste est évalué à l'aide de l'inégalité $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$, c'est-à-dire $|R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2}+n+1} < \frac{1}{n+1}$. Etant donné que les inégalités $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$ et $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$ sont équivalentes, alors, en prenant $n \geqslant N$, où N est un entier positif quelconque vérifiant la condition $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$, on obtient l'inégalité $|R_n(x)| < \varepsilon$. Ainsi donc, la série proposée converge uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

249. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ converge non uniformément dans l'intervalle $(-1, 1)$.

S o l u t i o n. Dans cet intervalle, la série converge comme une progression géométrique infiniment décroissante. On a $R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \ldots$, c'est-à-dire $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Mais

$$\lim_{x\to -1+0} |R_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 1-0} R_n(x) = \infty.$$

Par conséquent, en prenant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on n'arrive pas à vérifier l'inégalité pour tout x. Donc, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ converge de façon non uniforme.

250. En appliquant le critère de Weierstrass, montrer que la série

$$\sin x + \frac{1}{2^2}\cdot\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\cdot\sin^3 3x + \ldots$$

converge uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Solution. Etant donné que $\left|\frac{1}{n^2}\sin^n nx\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et que la série $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ converge, la série proposée converge uniformément pour tout x.

251. Peut-on appliquer à la série

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\frac{x}{3\sqrt{3}}+\ldots$$

le théorème sur la dérivation terme à terme des séries?

Solution. Comparons la série proposée avec la série convergente $x+\frac{x}{2^{3/2}}+\frac{x}{3^{3/2}}+\ldots$ (pour tout x fixé). Alors

$$u_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{n^{3/2}},\quad v_n(x)=\frac{x}{n^{3/2}}.$$

Vu que $\operatorname{arctg}\alpha$ et α sont des infiniment petits équivalents, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)}=$ $=1$ et, en appliquant le dèuxième critère de comparaison, on conclut que la série $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\frac{x}{3\sqrt{3}}+\ldots$ converge.

Considérons une série constituée par les dérivées des termes de la série proposée.

Calculons la dérivée du terme général:

$$u_n'(x)=\frac{\frac{1}{n^{3/2}}}{1+\frac{x^2}{n^3}}=\frac{n^{3/2}}{x^2+n^3}.$$

La série formée de dérivées est de la forme

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3}+\frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3}+\frac{4\sqrt{4}}{x^2+4^3}+\ldots.$$

Remarquons que les termes de cette dernière série sont plus petits que les termes correspondants de la série convergente $1+\frac{1}{2^{3/2}}+$ $+\frac{1}{3^{3/2}}+\ldots$. Par conséquent, d'après le critère de Weierstrass, la série formée de dérivées converge uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et l'on est autorisé à appliquer à la série donnée le théorème sur la dérivation des séries.

252. Est-il justifié d'appliquer à la série

$$\cos x+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2^2}\cdot\cos 3x+\frac{1}{2^3}\cdot\cos 4x+\ldots$$

le théorème sur l'intégration des séries de fonctions sur le segment $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$?

S o l u t i o n. Les termes de la série proposée, pour toute valeur de x, sont plus petits, en valeur absolue, que les termes correspondants de la progression géométrique infiniment décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

Aussi, d'après le critère de Weierstrass, la série proposée converge-t-elle uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et, par conséquent, on peut appliquer à cette série le théorème sur l'intégration des séries quel que soit le segment fini $[a, b]$ et notamment, le segment $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

253. On donne la série de fonctions

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^3+\ldots.$$

Cette série, converge-t-elle aux points $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$?

Réponse. Elle diverge aux points $x = 1$, $x = 2$ et converge au point $x = 3$.

254. Etudier la convergence de la série de fonctions $\frac{1!}{1}(x^2-4x+6)+\frac{2!}{2^2}(x^2-4x+6)^2+\frac{3!}{3^3}(x^2-4x+6)^3+\ldots$ aux points $x = 1$ et $x = 2$.

Réponse. Elle diverge au point $x = 1$ et converge au point $x = 2$.

255. Calculer le domaine de convergence de la série

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\ldots.$$

Réponse. $(0, +\infty)$.

256. Calculer le domaine de convergence de la série

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots.$$

Réponse. $(1, +\infty)$.

257. Calculer le domaine de convergence de la série

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}-\frac{1}{3^2(x^2+1)^3}+\frac{1}{4^2(x^2+1)^4}+\ldots.$$

Réponse. $(-\infty, +\infty)$.

258. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}$ converge uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

259. Montrer que la série

$$\frac{2x+1}{x+2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^4+\ldots$$

converge uniformément sur le segment $[-1, 1]$.

260. Montrer que la série

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+\ldots$$

dans l'intervalle $(-2, 2)$ converge de façon non uniforme.

261. Montrer que la série

$$\frac{\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x}{3}+\frac{(\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x)^2}{3^2}+\frac{(\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x)^3}{3^3}+\ldots$$

converge dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et établir la nature de sa convergence (uniforme, non uniforme).

Réponse. La série converge uniformément.

262. Peut-on appliquer à la série

$$\sin x+\frac{1}{2^2}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3^2}\cdot\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{4^2}\cdot\sin\frac{x}{4}+\ldots$$

le théorème sur la dérivation des séries de fonctions?

Réponse. Oui.

263. Peut-on appliquer à la série $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+\frac{\cos^3 x}{3!}+\ldots$ le théorème sur l'intégration des séries de fonctions sur tout segment fini $[a, b]$?

Réponse. Oui.

264. Peut-on appliquer à la série

$$(x^2+1)+2(x^2+1)^2+3(x^2+1)^3+4(x+1)^4+\ldots$$

le théorème sur la dérivation des séries de fonctions?

Réponse. Non. La série diverge pour toute valeur de x.

§ 3. Séries entières

Une série de fonctions de la forme

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

où $a, a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels est appelée *série entière*.

La propriété essentielle des séries entières consiste en ce qui suit: *si une série entière converge pour $x=x_0$, elle converge (et ceci, absolument) pour toute valeur de x telle que l'inégalité $|x-a|<|x_0-a|$ soit vérifiée* (théorème d'Abel).

L'un des corollaires du théorème d'Abel est le fait que, pour toute série entière, il existe un *intervalle de convergence* de centre a $\{|x-a|<R$ ou $a-R<x<a+R\}$, à l'intérieur duquel la série entière converge absolument pour diverger à son extérieur. Aux extrémités de l'intervalle de convergence (aux points $x=a\pm R$), diverses séries entières se comportent de manière différente: les unes sont absolument convergentes aux deux extrémités, d'autres sont soit semi-convergentes aux deux extrémités, soit semi-convergentes à l'une d'elles pour diverger à l'autre, et, enfin, il y a celles qui divergent aux deux extrémités.

Le nombre R, qui est la moitié de la longueur de l'intervalle de convergence, est appelé *rayon de convergence* d'une série entière. Dans des cas particuliers, le rayon de convergence R de la série peut être nul ou égal à l'infini. Si $R=0$,

alors la série entière ne converge que pour $x = a$, mais si $R = \infty$, alors la série converge sur tout l'axe numérique Ox.

Pour la recherche de l'intervalle et du rayon de convergence d'une série entière, on peut faire appel à l'un des procédés suivants.

1. Si parmi les coefficients de la série $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ il n'y a pas de coefficients nuls, c'est-à-dire que la série contient t o u t e s les puissances entières positives de la différence $x - a$, alors

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

si cette limite (finie ou infinie) existe.

2. Si la série initiale est de la forme

$$a_0 + a_1 (x - a)^p + a_2 (x - a)^{2p} + \ldots + a_n (x - a)^{np} + \ldots,$$

(où p est un entier positif déterminé 2, 3, ...), alors

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}.$$

3. Si parmi les coefficients de la série il y en a qui sont nuls et que la succession des puissances restantes de la différence $x - a$ dans la série est quelconque (c'est-à-dire qu'elle ne forme pas une progression arithmétique comme dans le cas précédent), alors le rayon de convergence peut être trouvé d'après la formule

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

dans laquelle ne sont utilisées que les valeurs de a_n différentes de zéro. (Cette formule est aussi applicable dans les cas 1 et 2.)

4. Dans tous les cas, l'intervalle de convergence peut être trouvé en appliquant immédiatement le critère de d'Alembert ou celui de Cauchy à une série formée des valeurs absolues des termes de la série initiale.

En recopiant la série sous la forme

$$u_0 (x) + u_1 (x) + u_2 (x) + \ldots + u_n (x) + \ldots$$

(ici, $u_0 = a_0$, $u_n (x) = a_n (x - a)^N$, où le rapport entre N et n peut être quelconque, le coefficient du n-ième terme de la série et non pas le coefficient de $(x - a)^n$ étant désigné par a_n), on trouve l'intervalle de convergence à partir des inégalités:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1 \text{ ou b) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

P r o p r i é t é s d e s s é r i e s e n t i è r e s

Les séries obtenues par dérivation et intégration terme à terme d'une série entière admettent le même intervalle de convergence et leur somme à l'intérieur de cet intervalle de convergence est respectivement égale à la dérivée et à l'intégrale de la somme de la série initiale.

Si

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \\ \text{alors} \quad S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \\ \int_a^x S(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}\right\} -R < x - a < R.$$

L'opération de dérivation et d'intégration terme à terme d'une série entière peut être effectuée autant de fois que l'on veut. Ainsi donc, la somme d'une série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence est une fonction infiniment dérivable.

265. Etudier la convergence de la série entière

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$$

Solution. Ici $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Calculons le rayon de convergence de cette série :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Ainsi, la série converge pour les valeurs de x vérifiant l'inégalité $-1<x<1$. Etudions la convergence de la série aux extrémités de l'intervalle.

Si $x=1$, alors on obtient la série harmonique $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, qui, comme on le sait, diverge.

Si $x=-1$, on a alors la série $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$ Cette série converge car elle vérifie les conditions propres au critère de Leibniz.

Ainsi, le domaine de convergence de la série entière est défini par l'inégalité $-1\leqslant x<1$.

266. Etudier la convergence de la série

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots$$

Solution. Ici

$$a_n=\frac{1}{n^2},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Par conséquent, la série converge si $-1<x-2<1$, c'est-à-dire que $1<x<3$.

Etudions la convergence de la série aux extrémités de l'intervalle.

Si $x=3$, on obtient alors la série $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ Cette série converge car la série $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$ converge lorsque $p>1$.

Si $x = 1$, on obtient alors la série $-1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots$ Cette série converge (et même absolument), car la série formée des valeurs absolues de ses termes converge.

Ainsi donc, la série entière converge pour les valeurs de x vérifiant l'inégalité double $1 \leqslant x \leqslant 3$.

267. Etudier la convergence de la série

$$1!\,(x-5) + 2!\,(x-5)^2 + 3!\,(x-5)^3 + \ldots$$

Solution. Ici $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

La série ne converge que pour $x - 5 = 0$, c'est-à-dire qu'elle converge au point $x = 5$.

268. Etudier la convergence de la série

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Solution. On a

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}, \quad a_0 = 0;$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Par conséquent, la série converge quelle que soit la valeur de x. On en conclut, entre autres, que la limite du terme général de la série pour n'importe quelle valeur de x est nulle, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

269. Etudier la convergence de la série

$$1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \frac{x^9}{10^3} + \ldots$$

Solution. Cette série forme une progression géométrique de raison $q = \frac{x^3}{10}$. Elle converge si $\left|\frac{x^3}{10}\right| < 1$ et diverge lorsque $\left|\frac{x^3}{10}\right| \geqslant 1$. Par conséquent, l'intervalle de convergence de la série est défini par l'inégalité double $-\sqrt[3]{10} < x < \sqrt[3]{10}$. On peut obtenir le même résultat en utilisant les formules citées aux pp. 2 et 3, page 81.

270. Etudier la convergence de la série

$$2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \frac{16x^{20}}{6} + \ldots$$

Solution. Posons $x^5 = t$. On obtient la série

$$2t+\frac{4t^2}{3}+\frac{8t^3}{5}+\frac{16t^4}{7}+\ldots,\quad a_n=\frac{2^n}{2n-1},\quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+1}.$$

Calculons le rayon de convergence de la dernière série:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi donc, la série converge lorsque $|t|<\frac{1}{2}$.

Etudions la convergence de la série aux extrémités de l'intervalle. Si $t=\frac{1}{2}$, on obtient alors la série $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ Cette série diverge (on peut la comparer avec la série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$, dont les termes sont représentés par les termes de la série harmonique, multipliés par $\frac{1}{2}$). En faisant $t=-\frac{1}{2}$, on obtient la série $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ Cette série est semi-convergente. Par conséquent, la série $2t+\frac{4t^2}{3}+\frac{8t^3}{5}+\ldots$ converge lorsque $-\frac{1}{2}\leqslant t<\frac{1}{2}$. Ainsi donc, la série donnée converge lorsque $-\frac{1}{2}\leqslant x^5<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\leqslant x<\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

On obtient le même résultat avec la formule

$$R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}.$$

271. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k(x-2)^{2k}.$$

Solution. Dans ce cas on a $a_n=0$ pour $n=2k-1$, et $a_n=\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ pour $n=2k$. Lors de la recherche du rayon de convergence, le plus commode est d'utiliser la formule

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

On trouve

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{2k+1}{2k+1}}=\sqrt{2}.$$

Etudions la série aux extrémités de l'intervalle de convergence. En posant $x-2=\sqrt{2}$, on obtient la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k\cdot 2^k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k.$$

Mais $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k=\sqrt{e}\neq 0$. Ainsi donc, pour $x-2=\sqrt{2}$ la série diverge. Il en sera de même lorsque $x-2=-\sqrt{2}$. Ainsi, le domaine de convergence de la présente série est $2-\sqrt{2}<$ $<x<2+\sqrt{2}$.

272. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}.$$

S o l u t i o n. Appliquons le critère de Cauchy en posant $u_n=\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. Alors

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{|x-1|^{n+1}}{n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\begin{cases}0 & \text{pour } |x-1|\leqslant 1,\\ \infty & \text{pour } |x-1|>1.\end{cases}$$

Ainsi donc, la série converge lorsque $|x-1|\leqslant 1$, c'est-à-dire elle converge sur le segment $0\leqslant x\leqslant 2$.

273. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}.$$

S o l u t i o n. Appliquons le critère de d'Alembert, en posant

$$u_n=\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n+1)!}.$$

Ainsi

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|^n}{n+1};\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\begin{cases}0 & \text{pour } |x|\leqslant 1,\\ \infty & \text{pour } |x|>1.\end{cases}$$

Ainsi, la série converge lorsque $|x|\leqslant 1$, c'est-à-dire elle converge sur le segment $-1\leqslant x\leqslant 1$.

274. Calculer la somme de la série $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$, $\ldots$, $(|x|<1)$, en dérivant terme à terme la série $1+x+x^2+$ $+x^3+\ldots$ $(|x|<1)$.

Solution. En appliquant la formule de la somme des termes d'une progression géométrique infiniment décroissante $\left(S = \frac{a}{1-q}\right)$, on obtient

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Il ne reste qu'à dériver l'égalité obtenue :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

275. Calculer la somme de la série

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (|x| < 1).$$

Solution. En intégrant l'égalité

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

entre les bornes 0 et x, on obtient

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots = -\ln(1-x).$$

Cette série converge dans l'intervalle $[-1, 1)$.

276. Etudier la convergence de la série entière

$$\frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{3!} + \frac{(x+1)^3}{5!} + \ldots$$

Réponse. $-\infty < x < +\infty$.

277. Etudier la convergence de la série entière

$$(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \ldots$$

Réponse. $3 \leqslant x < 5$.

278. Etudier la convergence de la série entière

$$\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \ldots$$

Réponse. $1 < x < 3$.

279. Etudier la convergence de la série entière

$$x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \ldots$$

Réponse. La série ne converge qu'au point $x = 0$.

280. Etudier la convergence de la série entière

$$5x + \frac{5^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{5^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{5^4 \cdot x^4}{4!} + \ldots$$

Réponse. La série converge pour tout x.

281. Etudier la convergence de la série entière

$$x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+\ldots$$

Indication. Poser $x^2=t$.

Réponse. $-1<x<1$.

282. Etudier la convergence de la série

$$\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{8^2\cdot 5}+\frac{x^9}{8^3\cdot 9}+\frac{x^{12}}{8^4\cdot 13}+\ldots$$

Réponse. $-2\leqslant x<2$.

283. Etudier la convergence de la série

$$\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots$$

Réponse. $-3<x<3$.

284. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2}\,\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\frac{4}{5}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4+\ldots$$

Réponse. $-1<x<3$.

285. Etudier la convergence de la série

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}+\ldots$$

Réponse. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

286. Calculer la somme de la série

$$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\frac{4x^3}{a^4}+\ldots,$$

si $|x|<a$.

Réponse. $\frac{a}{(a-x)^2}$.

287. Calculer la somme de la série

$$\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+\ldots,$$

si $-a\leqslant x<a$.

Réponse. $a\ln\frac{a}{a-x}-x$.

288. Calculer la somme de la série

$$\frac{1\cdot 2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{a^3}\cdot x+\frac{3\cdot 4}{a^4}\cdot x^2+\ldots,$$

si $|x|<a$.

Réponse. $\frac{2a}{(a-x)^3}$.

289. Calculer la somme de la série

$$-2x+4x^3-6x^5+8x^7-\ldots,$$

si $|x|<1$.

Réponse. $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

§ 4. Développement des fonctions en séries entières

Toute fonction infiniment dérivable dans l'intervalle $|x - x_0| < r$, c'est-à-dire $x_0 - r < x < x_0 + r$, peut être développée dans cet intervalle en une série entière infinie, appelée *série de Taylor*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

si dans cet intervalle est vérifiée la condition

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

où $R_n(x)$ est le terme résiduel de la formule de Taylor,

$$c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Pour $x_0 = 0$, on obtient la *série de Maclaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Si, dans un certain intervalle contenant un point x_0, pour tout n est vérifiée l'inégalité $|f^n(x)| < M$, où M est une constante positive, alors $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ et la fonction $f(x)$ est développable en série de Taylor.

Citons les développements en série de Taylor des fonctions suivantes:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Ce dernier développement est valable:

pour $m \geqslant 0$ si $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
pour $-1 < m < 0$ si $-1 < x \leqslant 1$;
pour $m \leqslant -1$ si $-1 < x < 1$;

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad -1 < x \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

290. Développer en série entière la fonction $f(x) = 2^x$.

Solution. Calculons les valeurs de cette fonction et de ses dérivées pour $x = 0$:

$$f(x) = 2^x, \qquad f(0) = 2^0 = 1,$$
$$f'(x) = 2^x \ln 2, \qquad f'(0) = \ln 2,$$
$$f''(x) = 2^x \ln^2 2, \qquad f''(0) = \ln^2 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = 2^x \cdot \ln^n 2; \qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 2.$$

Vu que $0 < \ln 2 < 1$, pour un x fixé, l'inégalité $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ est vérifiée quel que soit n. Par conséquent, la fonction peut être mise sous la forme représentant la somme de la série de Taylor:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

Dans notre cas,

$$2^x = 1 + x \cdot \ln 2 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 2}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ce développement s'obtient aussi d'une autre manière: il suffit dans le développement

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

de remplacer x par $x \ln 2$.

291. Développer en série entière la fonction

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Solution. Dérivons la fonction $n + 1$ fois:

$$f(x) = \sin^2 x,$$
$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$$
$$f''(x) = 2 \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$f'''(x) = -2^2 \cdot \sin 2x = 2^2 \sin\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -2^3 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \sin\left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin\left[2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right],$$
$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right).$$

Calculons les valeurs des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ au point $x = 0$, la valeur de $f^{(n+1)}(x)$ étant déterminée au point

$x = c$ (voir l'égalité correspondant à la détermination de R_n). On obtient $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$, $f^{\mathrm{IV}}(0) = -2^3$, $f^{\mathrm{V}}(0) = 0$, $f^{\mathrm{VI}}(0) = 2^5$, ..., $f^{(n+1)}(c) = 2^n \cdot \sin\left(2c + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$.

Calculons le terme résiduel: $R_n = \dfrac{2^n \cdot \sin\left(2c + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$, ou $R_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(2c + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$. Vu que pour tout x, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, et que $\sin\left(2c + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ est une grandeur limitée, alors $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$. Par conséquent, la fonction $f(x) = \sin^2 x$ peut être présentée comme la somme de la série de Taylor:

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \ldots$$

On peut résoudre autrement ce problème. Remplaçons $\cos 2x$ dans l'égalité $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ par son développement en série entière:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots$$

Après avoir effectué des transformations peu compliquées, on obtient le développement de $\sin^2 x$ calculé ci-dessus.

292. Développer en série entière e^{-x^2}.

Solution. Remplaçons x par $-x^2$ dans le développement

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots (-\infty < x < +\infty).$$

On obtient alors

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots (-\infty < x < +\infty).$$

293. Développer $\ln x$ en série suivant les puissances de $x - 1$.

Solution. Remplaçons x par $x - 1$ dans le développement

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots (-1 < x \leqslant 1).$$

On obtient alors

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots (0 < x \leqslant 2).$$

294. Développer $\frac{1}{x}$ en série suivant les puissances de $x - 2$.

Solution. Faisons appel à l'égalité $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x-2}{2}}$.

Le deuxième membre de cette égalité peut être considéré comme la somme d'une progression infiniment décroissante de premier terme $a=\frac{1}{2}$ et de raison $q=-\frac{x-2}{2}$.

D'où l'on tire

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots$$

Vu que $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, alors $0<x<4$.

Développer en séries entières les fonctions:

295. $f(x)=3^x$.

Réponse. $1+x\ln 3+\frac{x^2\ln^2 3}{2!}+\frac{x^3\cdot\ln^3 3}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty$.

296. $f(x)=e^{-2x}$.

Réponse. $1-\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}-\frac{8x^3}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty$.

297. $f(x)=\cos^2 x$.

Réponse. $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots,\ -\infty<x<+\infty$.

298. $f(x)=\operatorname{sh}^2 x$.

Réponse. $\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6+\frac{2^7}{8!}x^8+\ldots,\ -\infty<x<+\infty$.

299. $f(x)=\ln(x+a),\ a>0$.

Réponse. $\ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\ldots,\ -a<x\leqslant a$.

300. $f(x)=\sqrt{x+a},\ a>0$.

Réponse. $\sqrt{a}\cdot\left[1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{(2a)^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot x^3}{(2a)^3\cdot 3!}-\right.$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^4}{(2a)^4\cdot 4!}+\ldots\right],\quad -a<x\leqslant a.$$

301. $f(x)=\operatorname{ch}^2(x^2)$.

Réponse. $1+\frac{2}{2!}\cdot x^4+\frac{2^3}{4!}\cdot x^8+\frac{2^5}{6!}\cdot x^{12}+\frac{2^7}{8!}\cdot x^{16}+\ldots,$

$$-\infty<x<+\infty.$$

§ 5. Calcul approché des valeurs des fonctions à l'aide des séries entières

Ici, il est bon d'avoir en vue les développements en séries entières des fonctions e^x, sh x, ch x, sin x, cos x, $(1+x)^m$, ln $(1+x)$, arctg x cités au paragraphe précédent.

Pour le calcul des logarithmes, la formule

$$\ln(t+1)=\ln t+2\left[\frac{1}{2t+1}+\frac{1}{3(2t+1)^3}+\frac{1}{5(2t+1)^5}+\dots\right]$$

est bien efficace. La série du deuxième membre de l'égalité converge d'autant plus rapidement que plus grand est t.

En calculant la valeur approchée d'une fonction $f(x)$ dans son développement en série entière, on conserve les n premiers termes (n est une valeur finie), les autres termes étant rejetés. Pour évaluer l'erreur commise pendant le calcul de la valeur approchée, il faut évaluer la somme des termes rejetés. Si les termes de la série donnée ont le même signe, alors la série formée par les termes rejetés sera comparée avec une progression géométrique infiniment décroissante. Dans le cas d'une série alternée dont les termes satisfont au critère de Leibniz, on utilise l'évaluation $|R_n|<u_{n+1}$, où u_{n+1} est le premier des termes rejetés.

302. Evaluer l'erreur de l'égalité approchée

$$e^x\cong 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!},\quad 0<x<n+1.$$

S o l u t i o n. L'erreur de cette égalité approchée est définie par la somme des termes qui suivent $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement de e^x :

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\dots,$$

ou

$$R_n=\frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right].$$

Remplaçons chacun des facteurs du dénominateur : $n+2$, $n+3$, $n+4$, ... par une valeur moindre $n+1$.

On obtient l'inégalité

$$R_n<\frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1}+\left(\frac{x}{n+1}\right)^2+\left(\frac{x}{n+1}\right)^3+\dots\right].$$

Formons la somme de la progression géométrique infiniment décroissante entre crochets :

$$R_n<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}},\quad \text{c'est-à-dire } R_n<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}.$$

303. Calculer $\sqrt{e}$ à 0,00001 près.

S o l u t i o n. En appliquant le développement de e^x, on obtient

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\dots$$

Calculons le nombre n de manière que l'erreur de l'égalité approchée

$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,2^n}$$

ne soit pas supérieure à 0,00001. Faisons appel à l'évaluation de l'erreur citée dans l'exercice précédent. Posons $x = \frac{1}{2}$; alors

$$R_n < \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}}, \text{ c'est-à-dire } R_n < \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Par un choix convenable, déterminons une valeur de n telle que l'inégalité $R_n < 0{,}00001$ soit vérifiée. Posons, par exemple, $n = 3$. On obtient

$$R_3 < \frac{1}{8\cdot 6\cdot 7}, \quad \text{c'est-à-dire } R_3 < \frac{1}{336}.$$

Soit $n = 5$; d'où

$$R_5 < \frac{1}{32\cdot 120\cdot 11}, \quad \text{c'est-à-dire } R_5 < \frac{1}{42240}.$$

Soit $n = 6$; d'où

$$R_6 < \frac{1}{64\cdot 720\cdot 13}, \quad \text{c'est-à-dire } R_6 < \frac{1}{100000}.$$

Ainsi, on s'arrête à $n = 6$:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \frac{1}{4!\,2^4} + \frac{1}{5!\,2^5} + \frac{1}{6!\,2^6}.$$

Additionnons les termes:

1,000000
0,500000
0,125000
0,020833 (6 fois plus petit que le terme précédent)
+
0,002604 (8 fois plus petit que le terme précédent)
0,000260 (10 fois plus petit que le terme précédent)
0,000022 (12 fois plus petit que le terme précédent)

1,648719.

Donc, $\sqrt{e} \cong 1{,}64872$. Nous avons calculé chaque terme à additionner à 0,000001 près de manière que l'erreur de la somme ne soit pas supérieure à 0,00001.

304. Calculer $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ à 0,00001 près.

Solution. On a

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{1!\,5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}-\frac{1}{3!\,5^3}+\ldots$$

Adressons-nous à l'égalité approchée

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\cong 1-\frac{1}{1!\,5}+\frac{1}{2!\,5^2}-\frac{1}{3!\,5^3}+\frac{1}{4!\,5^4}.$$

Nous avons pris 5 termes à additionner car la série alternée vérifie les conditions du critère de Leibniz, d'où vient que l'erreur admissible doit être, en valeur absolue, plus petite que le premier des termes rejetés de la série. Dans notre cas, le premier des termes rejetés est égal à $\frac{1}{5!5^5}$. Il n'est pas difficile de voir que $\frac{1}{5!5^5}<$ $<0{,}00001$.

Additionnons les termes occupant les positions impaires:

$$\begin{array}{r} 1{,}000000 \\ +\,0{,}020000 \\ 0{,}000067 \\ \hline 1{,}020067. \end{array}$$

Additionnons les termes occupant les positions paires:

$$\begin{array}{r} +\,0{,}200000 \\ 0{,}001333 \\ \hline 0{,}201333. \end{array}$$

Retranchons la seconde somme de la première:

$$\begin{array}{r} -\,1{,}020067 \\ 0{,}201333 \\ \hline 0{,}818734. \end{array}$$

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\cong 0{,}81873$.

305. En appliquant le développement en série de $\cos x$, calculer $\cos 18^\circ$ à 0,0001 près.

Solution. On a

$$\cos 18^\circ=\cos\frac{\pi}{10}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4-\ldots$$

$$\frac{\pi}{10}=0{,}31416,\quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2+0{,}09870,\quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^4=0{,}00974.$$

Il suffit de prendre trois termes de la série, car $\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6<$ $<0{,}0001$. Alors

$$\cos 18^\circ\cong 1-\frac{0{,}09870}{2}+\frac{0{,}00974}{24};\quad \cos 18^\circ\cong 0{,}9511.$$

306. Calculer $\sqrt[5]{1,1}$ à 0,0001 près.

S o l u t i o n. Adressons-nous au développement de $(1+x)^m$, en posant $x = 0,1$, $m = \frac{1}{5}$. On a

$$\sqrt[5]{1,1} = (1+0,1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}0,01 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}0,001 + \ldots =$$

$$= 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \ldots$$

On rejette le quatrième terme et les termes qui le suivent, car le quatrième terme est plus petit que 0,0001.

Ainsi, $\sqrt[5]{1,1} \cong 1,0192$.

307. Calculer $\sqrt[5]{130}$ à 0,001 près.

S o l u t i o n. Etant donné que 5^3 est le cube d'un entier le plus proche du nombre 130, il est avantageux de présenter le nombre 130 sous la forme d'une somme de deux termes à additionner: $130 = 5^3 + 5$. Alors

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5(1+0,04)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot 0,04 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot 0,0016 +\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\cdot 0,000064 + \ldots\right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot 0,2 - \frac{1}{9}\cdot 0,008 + \frac{5}{8!}\cdot 0,00032 - \ldots$$

Le quatrième terme est plus petit que 0,001, d'où vient la possibilité de le rejeter ainsi que les termes suivants. Ainsi,

$$\sqrt[3]{130} \cong 5 + 0,0667 - 0,0009, \text{ c'est-à-dire } \sqrt[3]{130} \cong 5,066.$$

308. Calculer ln 1,04 à 0,0001 près.

S o l u t i o n. Faisons appel au développement de $\ln(1+x)$:

$$\ln 1,04 = \ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \ldots,$$

ou

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0.00000064 + \ldots,$$

d'où il vient $\ln 1,04 \cong 0,0392$.

309. Les côtés formant l'angle droit d'un triangle rectangle sont égaux à 1 et 5 cm. Calculer l'angle aigu opposé au moindre côté du triangle à 0,001 de radian près.

Solution. Vu que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, alors $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Adressons-nous au développement

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \ldots,$$

d'où $\alpha \cong 0{,}2 - 0{,}0027$, c'est-à-dire $\alpha \cong 0{,}197$.

310. On prend dans la formule pour le calcul des logarithmes (voir la page 92) les n premiers termes de la série. Evaluer l'erreur commise. En d'autres termes, on exige d'évaluer l'erreur de l'égalité approchée

$$\ln(t+1) \cong \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}}\right].$$

Solution. Le problème se ramène à l'évaluation de la somme du reste de la série

$$R_n = 2\left[\frac{1}{(2n+1)(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)(2t+1)^{2n+3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2n+5)(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right].$$

Remplaçons chacun des facteurs des dénominateurs $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$, ... par un nombre moindre $2n+1$. On obtient l'inégalité

$$R_n < \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right].$$

Formons la somme de la progression géométrique infiniment décroissante figurant entre crochets:

$$R_n < \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}}}{1-\frac{1}{(2t+1)^2}} = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}[(2t+1)^2-1]} =$$
$$= \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}\cdot 4t(t+1)}.$$

Donc,

$$R_n < \frac{1}{2(2n+1)\cdot t(t+1)\cdot(2t+1)^{2n-1}}.$$

311. Calculer ln 2 à 0,0001 près.

S o l u t i o n. On pose $t = 1$ dans la formule aidant à calculer $\ln(t+1)$ et dans l'inégalité servant à évaluer R_n:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right),$$

$$R_n < \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}.$$

Par un choix convenable, calculons n de manière que l'inégalité $R_n < 0{,}0001$ soit vérifiée.

Si $n=2$, alors $R_2 < \frac{1}{4\cdot 5\cdot 3^3}$; $R_2 < \frac{1}{540}$.

Si $n=3$, alors $R_3 < \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3^5}$; $R_3 < \frac{1}{6804}$.

Si $n = 4$, alors $R_4 < \frac{1}{4\cdot 9\cdot 3^7}$; $R_4 < \frac{1}{10\,000}$. Ainsi, $n = 4$ et pour calculer ln 2 on obtient l'égalité approchée

$$\ln 2 \cong 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right).$$

Additionnons les termes ainsi obtenus:

$$\begin{array}{r} 0{,}66667 \\ 0{,}02469 \\ +\,0{,}00165 \\ 0{,}00013 \\ \hline 0{,}69314. \end{array}$$

Ainsi, $\ln 2 \cong 0{,}6931$.

312. Calculer ln 5 à 0,0001 près.

S o l u t i o n. Posons $t = 4$. Alors

$$\ln 5 = 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\ldots\right),$$

$$R_n < \frac{1}{40\cdot(2n+1)\cdot 9^{2n-1}}.$$

Si $n=1$, alors $R_1 < \frac{1}{40\cdot 3\cdot 9}$; $R_1 < \frac{1}{1080}$.

Si $n=2$, alors $R_2 < \frac{1}{40\cdot 5\cdot 9^3}$; $R_2 < \frac{1}{10\,000}$,

c'est-à-dire qu'il suffit de prendre deux termes de la série. Formons la somme

$$\begin{array}{r} 1{,}38628 \\ +\,0{,}22222 \\ 0{,}00090 \\ \hline 1{,}60940. \end{array}$$

Par conséquent, $\ln 5 \cong 2 \ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}\right)$, c'est-à-dire $\ln 5 \cong 1{,}6094$.

313. Montrer que l'identité $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ est valable et calculer π à 0,001 près.

Solution. En posant $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ dans l'égalité

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y,$$

on obtient $\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, ou $\pi = 4\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$. En faisant appel au développement de $\operatorname{arctg} x$, on obtient

$$\pi = 4\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \ldots\right)\right].$$

Formons les sommes:

2,00000	0,16667	3,36255
0,02500	0,00446	−0,22095
0,00087	+0,00018	3,14160
+0,00004	0,04938	
1,33333	0,00026	
0,00329	0,22095	
0,00002		
3,36255		

Ainsi, $\pi \cong 3{,}1416$.

On propose au lecteur de vérifier les calculs.

Pour calculer le nombre π, on aurait pu utiliser des séries qui convergent plus rapidement que les séries ci-dessus.

314. Calculer le nombre e à 0,00001 près.

Réponse. 2,71828.

315. Calculer $\frac{1}{\sqrt{e}}$ à 0,00001 près.

Réponse. 0,60653.

316. Calculer $\sin 9°$ à 0,0001 près.

Réponse. 0,1564.

317. Calculer $\operatorname{ch} 0{,}3$ à 0,0001 près.

Réponse. 1,0453.

318. Calculer $\sqrt[3]{1{,}06}$ à 0,0001 près.

Réponse. 1,0196.

319. Calculer $\sqrt{27}$ à 0,001 près.
Réponse. 5,196.
320. Calculer ln 0,98 à 0,0001 près.
Réponse. —0,0202.
321. Calculer ln 1,1 à 0,0001 près.
Réponse. 0,0953.
322. Calculer ln 3 à 0,0001 près.
Réponse. 1,0986.
323. Calculer ln 10 à 0,0001 près.
Réponse. 2,3026.
324. Calculer la plus petite valeur positive de x vérifiant l'équation trigonométrique

$$2 \sin x - \cos x = 0.$$

Réponse. 0,4636.
325. Calculer π à 0,001 près, en posant $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dans le développement de arctg x.
Réponse. 3,142.

§ 6. Application des séries entières au calcul des limites et des intégrales définies

326. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Solution. Remplaçons e^x et $\sin x$ par leurs développements en séries entières:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \ldots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \ldots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots} = 2.$$

327. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Solution. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right) x^2 + \ldots\right] = \frac{1}{6}.$$

328. Calculer à 0,0001 près l'intégrale définie

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Solution. Remplaçons $\cos x$ dans l'expression sous le signe d'intégration par son développement en série entière:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2!}\,x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots$$

D'où

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \cong 0{,}25-0{,}0017,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \cong 0{,}2483.$$

329. Calculer à 0,001 près l'intégrale définie

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$$

Solution. On trouve

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^{0,1} \frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^{0,1} \left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right) dx =$$

$$= \left(x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1} =$$

$$= 0{,}1-\frac{1}{4}\cdot 0{,}01+\frac{1}{9}\cdot 0{,}001-\ldots$$

Ainsi,

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \cong 0{,}098.$$

330. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Réponse. $\dfrac{1}{3}$.

331. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

Réponse. **1.**

332. Calculer $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ à 0,0001 près.

Réponse. 0,1996.

333. Calculer $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}\,dx$ à 0,001 près.

Réponse. 0,102.

§ 7. Nombres complexes et séries à termes complexes

1. Nombres complexes. On appelle *nombres complexes* les nombres de la forme $x+iy$, où x et y sont des nombres réels, $i=\sqrt{-1}$ étant l'*unité imaginaire*. Les nombres réels x et y sont respectivement appelés *parties réelle et imaginaire* d'un nombre complexe z. On introduit pour eux les notations:

$$x = \operatorname{Re} z; \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Géométriquement, tout nombre complexe $z=x+iy$ est représenté par un point $M(x;y)$ appartenant à un plan des coordonnées xOy (fig. 22).

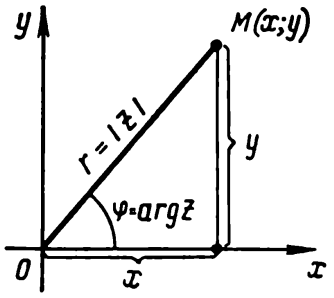

Fig. 22

Dans ce cas, le plan xOy est appelé plan complexe numérique, ou *plan de la variable complexe* z.

Dans ces conditions, les coordonnées polaires r et φ du point M du plan complexe constituant l'image du nombre complexe z sont respectivement appe-

lées *module* et *argument* du nombre complexe z; elles se notent:

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Vu le fait qu'à tout point du plan correspond une infinité de valeurs de l'angle polaire différant l'une de l'autre de $2k\pi$ (k est un entier, positif ou négatif), alors $\operatorname{Arg} z$ est une fonction admettant un nombre infini de valeurs de z.

Celle des valeurs de l'angle polaire φ qui vérifie l'inégalité $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ est appelée *détermination principale* de l'argument de z et est désignée par $\arg z$.

Dans ce qui suit, la notation φ ne sera conservée que pour la détermination principale de l'argument de z, c'est-à-dire on posera $\varphi = \arg z$, d'où vient que pour toutes les autres valeurs de l'argument de z, on obtient l'égalité

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi.$$

Les rapports entre lo module et l'argument d'un nombre complexe z ainsi qu'entre ses parties réelle et imaginaire sont établis par les formules

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi.$$

D'où il vient

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

L'argument de z peut être également déterminé à l'aide de la formule

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C,$$

où $C = 0$ pour $x > 0$; $C = +\pi$ pour $x < 0$, $y > 0$; $C = -\pi$ pour $x < 0$, $y < 0$.

En remplaçant x et y dans la formule du nombre complexe $z = x + iy$ par leurs expressions en fonction de r et φ, on obtient une *forme du nombre complexe* dite *trigonométrique*:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont considérés *égaux*, si, et seulement si, leurs parties réelles et imaginaires sont égales les unes aux autres:

$$z_1 = z_2, \quad \text{si} \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Pour les nombres complexes donnés sous forme trigonométrique, l'égalité a lieu lorsque les modules de ces nombres sont égaux, les arguments ne différant que d'un multiple entier de 2π:

$$z_1 = z_2 \quad \text{si} \quad |z_1| = |z_2| \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi.$$

Deux nombres complexes $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ à parties réelles égales et à parties imaginaires de signes opposés sont dits *conjugués*. Pour les nombres complexes conjugués on a:

$$|z_1| = |z_2|; \quad \arg z_1 = -\arg z_2$$

(cette dernière égalité peut être mise sous la forme $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = 2k\pi$).

Les opérations sur les nombres complexes sont régies par les règles ci-dessous.

A d d i t i o n. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

L'addition des nombres complexes est subordonnée aux lois commutative et associative:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3.$$

Soustraction. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Pour l'interprétation géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres complexes, il est bon de représenter ceux-ci non pas par des points du plan z mais par des vecteurs : le nombre $z = x + iy$ est assimilé à un vecteur $\overline{OM}$ dont l'origine se confond avec le point O (point « zéro » du plan, ou origine des

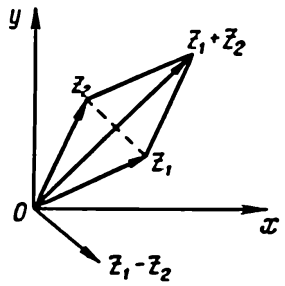

Fig. 23

coordonnées) et l'extrémité avec le point M $(x; y)$. Alors, l'addition et la soustraction des nombres complexes s'effectuent suivant la règle d'addition et de soustraction des vecteurs (fig. 23).

Une telle interprétation géométrique des opérations d'addition et de soustraction des vecteurs permet d'établir aisément les théorèmes sur le module de la somme et de la différence de deux nombres complexes ainsi que sur la somme de plusieurs nombres complexes. Ces théorèmes sont exprimés par les inégalités :

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_k| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_k|.$$

Par ailleurs, il est utile de retenir que le *module de la différence de deux nombres complexes z_1 et z_2 est égal à la distance entre les points qui les représentent dans le plan des z* : $|z_1 - z_2| = d(z_1, z_2)$.

Multiplication. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Ainsi, la multiplication des nombres complexes se ramène à celle de binômes, le symbole i^2 étant remplacé par -1.

Si $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Donc, *le module du produit est égal au produit des modules des facteurs, son argument étant égal à la somme des arguments des facteurs.*

La multiplication des nombres complexes est subordonnée aux lois commutative, associative et distributive (par rapport à l'addition) :

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1\,;\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3\,;$$
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Division. Pour trouver le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique, il faut multiplier le dividende et le diviseur par le nombre complexe conjugué du diviseur :

$$z_1 : z_2 = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Si z_1 et z_2 sont donnés sous forme trigonométrique, on a

$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Ainsi, *le module du quotient est égal au quotient des modules du dividende et du diviseur, alors que l'argument du quotient est égal à la différence des arguments du dividende et du diviseur.*

Élévation à une puissance. Si $z = x + iy$, alors

$$z^n = (x + iy)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot iy + \ldots + (iy)^n$$

(n est un entier positif); dans l'expression obtenue, il faut remplacer les puissances de i par leurs valeurs:

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^5 = i, \ldots$$

et, dans le cas général,

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Si $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, alors

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

(ici n peut être aussi bien un entier positif que négatif).

Et, en particulier,

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

(*formule de Moivre*).

Extraction de la racine. Si n est un entier positif, $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, alors en extrayant la racine n-ième du nombre complexe z on obtient n valeurs différentes qui se calculent d'après la formule

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

334. Calculer $\frac{z_1 z_2}{z_3}$, si $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = 1 + 2i$.

Solution. On a

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 5i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 10i - 15 = -9 + 19i,$$

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{-9 + 19i}{1 + 2i} = \frac{(-9 + 19i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} =$$

$$= \frac{-9 + 18i + 19i + 38}{1 + 4} = \frac{29}{5} + \frac{37}{5}i.$$

335. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = 2 + 5i$.

Solution. Calculons le module du nombre complexe: $r = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \cong 5{,}385$. Calculons la détermination principale de l'argument: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{2} = 2{,}5$, $\varphi = 68°12'$. Par conséquent, $z = 5{,}385(\cos 68°12' + i \sin 68°12')$.

336. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

Solution. On trouve

$$r=\sqrt{12+4}=4, \quad \sin\varphi=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2};$$

$$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi=-\frac{\pi}{6},$$

c'est-à-dire $z=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

337. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes : 1, i, -1, $-i$.

Solution. On a

$$1=1+0\cdot i=1\cdot(\cos 0+i\sin 0),$$

$$i=0+1\cdot i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$-1=-1+0\cdot i=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi),$$

$$-i=0-1\cdot i=1\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

338. Mettre sous forme trigonométrique les nombres $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$, $z_3=1+i\sqrt{3}$ et calculer ensuite le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2\cdot z_3}$.

Solution. On trouve

$$r_1=|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1=1, \quad \varphi_1=\arg z_1=\frac{\pi}{4},$$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$r_2=|z_2|=\sqrt{3+1}=2, \quad \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi_2=\arg z_2=\frac{\pi}{6},$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$r_3=|z_3|=\sqrt{3+1}=2, \quad \operatorname{tg}\varphi_3=\sqrt{3}, \quad \varphi_3=\arg z_3=\frac{\pi}{3},$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Par conséquent,

$$z_2\cdot z_3=2\cdot 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$\frac{z_1}{z_2\cdot z_3}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{4}(1-i).$$

339. Calculer toutes les valeurs de $\sqrt[3]{8+i}$.

S o l u t i o n. Mettons le nombre complexe $z=\sqrt[3]{8+i}$ sous forme trigonométrique :

$$r=|z|=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}\cong 8{,}062,$$

$$\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=7°6'.$$

D'où il vient

$$\sqrt[3]{8+i}=\sqrt[3]{8{,}062\,(\cos 7°6'+i\sin 7°6')}=$$

$$=\sqrt[3]{8{,}062}\cdot\left(\cos\frac{7°6'+360°\cdot k}{3}+i\sin\frac{7°6'+360°\cdot k}{3}\right)=$$

$$=2{,}0052\,[\cos(2°22'+120°\cdot k)+i\sin(2°22'+120°\cdot k)].$$

Si $k=0$, alors $w_0=2{,}0052\,(\cos 2°22'+i\sin 2°22')$.

Si $k=1$, alors $w_1=2{,}0052\,(\cos 122°22'+i\sin 122°22')$.

Si $k=2$, alors $w_2=2{,}0052\,(\cos 242°22'+i\sin 242°22')$.

Par conséquent

$$w_0=2{,}0034+0{,}0828i,$$

$$w_1=-1{,}0734+1{,}7120i,$$

$$w_2=-0{,}9300-1{,}7764i.$$

340. Résoudre l'équation binôme $w^5+32i=0$.

S o l u t i o n. Recopions l'équation sous la forme $w^5=-32i$. Mettons le nombre $-i$ sous forme trigonométrique :

$$w^5=32\,[\cos(-90°)+i\sin(-90°)],$$

ou

$$w=2\sqrt[5]{\cos(-90°)+i\sin(-90°)},$$

c'est-à-dire

$$w=2\left[\cos\frac{-90°+360°\cdot k}{5}+i\sin\frac{-90°+360°\cdot k}{5}\right]=$$

$$=2\,[\cos(-18°+72°\cdot k)+i\sin(-18°+72°k)].$$

Pour $k=0$ $w_0=2\,[\cos(-18°)+i\sin(-18°)]=$
$=1{,}9022-0{,}6180i$ (A).

Pour $k=1$ $w_1=2\,(\cos 54°+i\sin 54°)=$
$=1{,}1756+1{,}6180i$ (B).

Pour $k=2$ $w_2=2\,(\cos 126°+i\sin 126°)=$
$=-1{,}1756+1{,}6180i$ (C).

Pour $k=3$ $w_3=2\,(\cos 198°+i\sin 198°)=$
$=-1{,}9022-0{,}6180i$ (D).

Pour $k = 4$ $w_4 = 2(\cos 270° + i \sin 270°) = -2i$ (E).

Aux racines de l'équation binôme correspondent les sommets d'un pentagone équilatéral inscrit dans une circonférence de rayon $R = 2$ centrée sur l'origine des coordonnées (fig. 24).

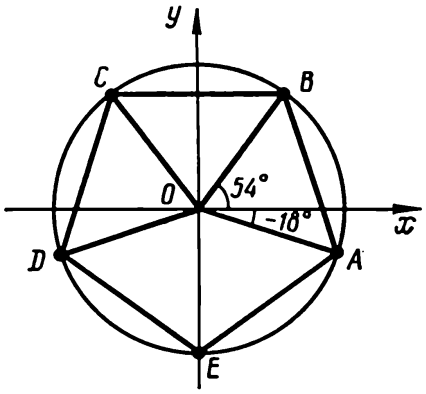

Fig. 24

En règle générale, aux racines de l'équation binôme $w^n = a$, où a est un nombre complexe, correspondent les sommets d'un n-gone équilatéral inscrit dans une circonférence centrée sur l'origine des coordonnées et de rayon $|\sqrt[n]{a}|$.

341. En appliquant la formule de Moivre, exprimer $\cos 5\varphi$ et $\sin 5\varphi$ par $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$.

Solution. Transformons le premier membre de l'égalité $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi$ en appliquant la formule du binôme de Newton:

$$\cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \cdot \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi -$$
$$- 10i \cos^2 \varphi \cdot \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \cdot \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi.$$

Il ne reste qu'à égaler entre elles les parties réelles et imaginaires de cette égalité:

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + 5 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^4 \varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \cdot \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi.$$

342. On donne le nombre complexe $z = 2 - 2i$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Réponse. 2, -2, $2\sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{4}$.

343. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = -12 + 5i$.

Réponse. $z = 13(\cos 157°23' + i \sin 157°23')$.

344. En appliquant la formule de Moivre, calculer l'expression $(\cos 2° + i \sin 2°)^{45}$.

Réponse. i.

345. En appliquant la formule de Moivre, calculer $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

Réponse. 1.

346. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $r = 1 + \cos 20° + i \sin 20°$.

Réponse. $2 \cos 10° (\cos 10° + i \sin 10°)$.

347. Calculer l'expression $(2 + 3i)^3$.

Réponse. $-46 + 9i$.

348. Calculer l'expression $\frac{(1-2i)(2-3i)}{(3-4i)(4-5i)}$.

Réponse. $\frac{249}{1025} - \frac{68}{1025} i$.

349. Calculer l'expression $\frac{1}{(3-2i)^2}$.

Réponse. $\frac{5}{169} + \frac{12}{169} i$.

350. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $5 - 3i$.

Réponse. $5{,}831 [\cos (-30°58') + i \sin (-30°58')]$.

351. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $-1 + i$.

Réponse. $\sqrt{2} (\cos 135° + i \sin 135°)$.

352. Calculer l'expression

$$\frac{(\cos 77° + i \sin 77°)(\cos 23° + i \sin 23°)}{\cos 55° + i \sin 55°}.$$

Réponse. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

353. Calculer l'expression $\frac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$, ayant mis au préalable sous forme trigonométrique les facteurs figurant au numérateur et au dénominateur.

Réponse. $\cos (-150°) + i \sin (-150°) = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$.

354. Calculer toutes les valeurs de $\sqrt[4]{i}$.

Réponse.

$\cos 22°30' + i \sin 22°30' = 0{,}9239 + 0{,}3827i$;
$\cos 112°30' + i \sin 112°30' = -0{,}3827 + 0{,}9239i$;
$\cos 202°30' + i \sin 202°30' = -0{,}9239 - 0{,}3827i$;
$\cos 292°30' + i \sin 292°30' = 0{,}3827 - 0{,}9239i$.

355. Résoudre l'équation binôme

$$w^3 - 4\sqrt{2}(1 + i) = 0.$$

Réponse.

$w_0 = 2 (\cos 15° + i \sin 15°) = 1{,}9318 + 0{,}5176i$;

$w_1 = 2(\cos 135° + i \sin 135°) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;
$w_2 = 2(\cos 255° + i \sin 255°) = -0{,}5176 - 1{,}9318i$.

356. Exprimer $\cos 4\varphi$ et $\sin 4\varphi$ par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.

Réponse.

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \sin^4\varphi,$$
$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi - 4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi.$$

357. On donne les points z_1 et z_2. Montrer que la distance entre ces points est égale à $|z_2 - z_1|$.

Solution. On a $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$, d'où il vient

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

c'est-à-dire que $|z_2 - z_1|$ est égale à la distance entre les points donnés.

358. Quelle est la ligne décrite par le point z vérifiant l'équation $|z - c| = R$, où c est un nombre complexe constant et $R > 0$?

Réponse. C'est une circonférence de rayon R et de centre au point c.

359. Quelle est l'interprétation géométrique des inégalités: a) $|z - c| < R$; b) $|z - c| > R$?

Réponse. a) L'ensemble de points d'un disque borné par la circonférence $|z - c| = R$; b) l'ensemble de points du plan situés en dehors de la circonférence $|z - c| = R$.

360. Quelle est l'interprétation géométrique des inégalités: a) $\operatorname{Re} z > 0$; b) $\operatorname{Im} z < 0$?

Réponse. a) L'ensemble de points du demi-plan situé à droite de l'axe imaginaire; b) l'ensemble de points du demi-plan situé au-dessous de l'axe réel.

2. Séries à termes complexes. Examinons la suite de nombres complexes $z_1, z_2, z_3, \ldots$, où $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Le nombre constant $c = a + bi$ est appelé *limite* de la suite $z_1, z_2, z_3, \ldots$ si à tout nombre aussi petit que l'on veut $\varepsilon > 0$ il correspond un numéro N tel que toutes les valeurs de z_n de numéros $n > N$ vérifient l'inégalité $|z_n - c| < \varepsilon$. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

Formulons la condition nécessaire et suffisante d'existence de la limite d'une suite de nombres complexes: le nombre $c = a + bi$ sera la limite de la suite de nombres complexes $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, $x_3 + iy_3$, ... si, et seulement si,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

La série

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots, \tag{1}$$

dont les termes sont des nombres complexes est dite *convergente* si la somme partielle n-ième S_n de la série tend vers une limite déterminée pour $n \to \infty$. Dans le cas contraire, la série (1) est dite *divergente*.

La série (1)

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

converge si, et seulement si, convergent les séries à termes réels

$$\operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Re} w_3 + \ldots \tag{2}$$

et

$$\operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} w_2 + \operatorname{Im} w_3 + \ldots \tag{3}$$

Si la somme de la série (2) est représentée par le nombre S', et celle de la série (3) par le nombre S'', alors la somme de la série (1) sera le nombre complexe

$$S = S' + iS''.$$

Si la série

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \text{ (où } w_n = u_n + iv_n)$$

converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$).

Si la série

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \ldots$$

converge, alors la série

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

converge elle aussi.

Dans ce cas, la dernière série est dite *absolument convergente*.

Soit donnée la série entière

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots,$$

où z_0, a_0, a_1, a_2, a_3, ... sont des nombres complexes, les coefficients de la série étant différents de zéro et z une variable complexe.

Cette série converge à l'intérieur du disque $|z - z_0| < R$, où $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ et diverge en dehors de ce disque pour des valeurs de z telles que l'inégalité $|z - z_0| > R$ soit vérifiée.

361. Etudier la convergence de la série

$$(1+i) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}i\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}i\right) + \ldots$$

S o l u t i o n. Les séries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ et $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ convergent car elles sont constituées par les termes des progressions géométriques infiniment décroissantes. Par conséquent, la série à termes complexes donnée converge elle aussi.

Calculons les sommes de ces progressions :

$$S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \quad S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Donc, la somme de la série proposée est le nombre complexe $S = 2 + \frac{3}{2}i$.

362. Etudier la convergence de la série

$$(1 + 0{,}1i) + \left(\frac{1}{2} + 0{,}01i\right) + \left(\frac{1}{3} + 0{,}001\,i\right) + \ldots$$

Solution. Examinons les séries $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ et $0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots$

La première de ces séries diverge, d'où vient que la série à termes complexes proposée diverge elle aussi.

363. Etudier la convergence de la série

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}i\right)+\ldots$$

Solution. La série diverge car le terme général de la série $w_n=\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}i$ ne tend pas vers zéro (on recommande au lecteur de s'en convaincre lui-même).

364. Montrer que la série

$$\frac{1+i}{2}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+\left(\frac{1+i}{2}\right)^3+\ldots$$

converge absolument.

Solution. Vu le fait que $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, alors

$$w_n=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}\right)^n=\frac{1}{2^{n/2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

Par conséquent, $|w_n|=\frac{1}{2^{n/2}}$. Formons une série à partir des modules

$$\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{2^2}+\ldots$$

Cette série dont les termes forment une progression géométrique décroissante converge; donc, la série à termes complexes donnée converge absolument.

365. Calculer le domaine de convergence de la série

$$\frac{\sqrt{3}+i}{3}(z-i)+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^2\cdot(z-i)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^3\cdot(z-i)^3+\ldots$$

Solution. On a

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n,\quad a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n+1},\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}+i},$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{|3|}{|\sqrt{3}+i|}=\frac{3}{\sqrt{3+1}}=\frac{3}{2},\quad R=\frac{3}{2}.$$

Le domaine de convergence est le disque $|z-i|<\frac{3}{2}$.

366. Montrer que la série

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}i\right)+\left(\frac{1}{125}-\frac{1}{8}i\right)+\ldots$$

converge et calculer sa somme.

Réponse. $S=\frac{1}{4}-i$.

367. Etudier la convergence de la série

$$\left(1+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2}i\right)+\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2^3}i\right)+\ldots$$

Réponse. La série est convergente.

368. Etudier la convergence de la série de terme général

$$w_n=\frac{1}{n!}+\frac{i}{n}.$$

Réponse. La série est divergente.

369. Montrer que la série

$$1+\frac{1}{2!}(1+i)+\frac{1}{3!}(1+i)^2+\frac{1}{4!}(1+i)^3+\ldots$$

converge absolument.

370. Trouver le domaine de convergence de la série

$$z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

Réponse. La série converge dans tout le plan.

371. Trouver le domaine de convergence de la série

$$(z-1-i)+2!\,(z-1-i)^2+3\,(z-1-i)^3+\ldots$$

Réponse. La série ne converge qu'au point $z=1+i$.

3. Fonction exponentielle et fonctions trigonométriques de la variable complexe. *La fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques de la variable complexe z sont définies par les égalités*

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots;$$

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots$$

Il existe entre les fonctions indiquées les rapports suivants:

$$e^{zi}=\cos z+i\sin z, \tag{1}$$

$$e^{-zi}=\cos z-i\sin z, \tag{2}$$

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \tag{3}$$

$$\sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}, \tag{4}$$

appelés *formules d'Euler.*

A l'aide de la formule d'Euler (1), le nombre complexe donné sous forme trigonométrique $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ peut être mis sous forme exponentielle $z = re^{\varphi i}$.

372. Mettre sous formes trigonométrique et exponentielle le nombre complexe $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Solution. Mettons ce nombre sous forme trigonométrique

$$r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6};$$

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

ou sous forme exponentielle

$$z = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

373. Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Solution. On trouve $r = \sqrt{2+2} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; $z = 2\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

374. Calculer la valeur numérique de $e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Solution. Appliquons la formule d'Euler (1):

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

375. En appliquant la formule d'Euler, montrer que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

Solution. Vu le fait que $\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$, alors

$$\cos^3 x = \frac{e^{3xi}+3e^{xi}+3e^{-xi}+e^{-3xi}}{8} = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

376. Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$.

Réponse $2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

377. Mettre le nombre $-i$ sous forme exponentielle.

Réponse. $e^{\frac{\pi}{2}i}$.

378. A quoi est égal $e^{\pi i}$?

Réponse. -1.

379. Montrer que

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x.$$

380. Exprimer linéairement $\sin^3 x$ en fonction de $\sin x$ et $\sin 3x$.

Réponse. $\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

381. En appliquant la formule d'Euler, montrer que i^i admet un nombre infini de valeurs qui sont toutes réelles.

Réponse. $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ (k est un entier arbitraire).

§ 8. Série de Fourier

On appelle *série de Fourier* d'une fonction $f(x)$ définie sur le segment $[-\pi, \pi]$ une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

où

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos mx\,dx \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin mx\,dx \quad (m=1,\ 2,\ \ldots).$$

Si x_0 est un point de discontinuité de première espèce de la fonction $f(x)$, alors la somme de la série de Fourier définira une fonction se confondant aux points de discontinuité avec la fonction $f(x)$ et égale à $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ au point de discontinuité de première espèce indiqué.

Convenons par ailleurs d'assimiler la valeur de la fonction $f(x)$ à chaque extrémité du segment $[-\pi, \pi]$ à la valeur

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Si la fonction $f(x)$ sur le segment $[-\pi, \pi]$ admet un nombre fini d'extrémums et est continue, sauf peut-être en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire qu'elle satisfait aux conditions dites de Dirichlet), alors la série de Fourier converge vers la fonction $f(x)$ en chaque point du segment $[-\pi, \pi]$ (théorème de Dirichlet).

Il est aisé de voir que la somme de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ est une fonction périodique de période 2π.

Si la fonction $f(x)$ est donnée sur le segment $[-l, l]$, où l est un nombre arbitraire, et que les conditions de Dirichlet sont satisfaites sur le segment $[-l, l]$, la fonction indiquée peut être alors représentée par la somme de la série de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right),$$

où

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx,\quad b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si $f(x)$ est une fonction p a i r e, alors sa série de Fourier ne contient que le terme constant et les cosinus, c'est-à-dire que

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l},$$

et dans ce cas,

$$a_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si $f(x)$ est une fonction i m p a i r e, alors sa série de Fourier ne contient que les sinus, c'est-à-dire que

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin\frac{m\pi x}{l},$$

où

$$b_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si la fonction $f(x)$ est donnée sur le segment $[0, l]$, alors, pour obtenir son développement en série de Fourier, il suffit de la prolonger arbitrairement sur le segment $[-l, 0]$ et de la développer ensuite en série de Fourier en considérant qu'elle est donnée sur le segment $[-l, l]$. Il est le plus rationnel de prolonger cette fonction de manière que ses valeurs aux points $[-l, 0]$ soient déterminées à partir de la condition $f(x)=f(-x)$ ou $f(x)=-f(-x)$. Dans le premier cas, sur le segment $[-l, l]$ la fonction $f(x)$ sera paire, et dans le second, impaire. Dans ces conditions, les coefficients de Fourier d'une telle fonction (a_m dans le premier cas, et b_m dans le second) peuvent être déterminés d'après les formules ci-dessus appliquées aux coefficients des fonctions paires et impaires.

382. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-\pi, \pi]$ par l'équation $f(x)=\pi+x$.

S o l u t i o n. Le graphique de cette fonction est donné par le segment reliant les points $(-\pi; 0)$ et $(\pi; 2\pi)$. Sur la figure 25 est montré le graphique de la fonction $y=S(x)$, où $S(x)$ est la

somme de la série de Fourier de la fonction $f(x)$. Cette somme est une fonction périodique de période 2π qui se confond avec la fonction $f(x)$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.

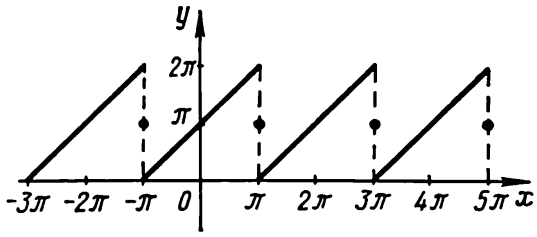

Fig. 25

Calculons les coefficients de la série de Fourier. On trouve

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx.$$

La seconde intégrale est nulle comme intégrale d'une fonction impaire prise dans un intervalle symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. Ainsi, $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$;

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cdot\cos mx\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\,dx.$$

Il est aisé de voir que les deux intégrales sont nulles (la fonction sous le signe d'intégration de la seconde intégrale est une fonction impaire en tant que produit d'une fonction paire par une fonction impaire). Donc,

$$a_m = 0, \text{ c'est-à-dire } a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

Maintenant, calculons les coefficients b_m:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cdot\sin mx\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx\,dx.$$

La première intégrale est nulle. La fonction sous le signe d'intégration de la seconde intégrale est une fonction paire en tant que produit de deux fonctions impaires.

Ainsi,

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx \, dx.$$

Appliquons l'intégration par parties:

$$u = x, \quad dv = \sin mx \, dx, \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{m} \cos mx,$$

$$b_m = -\frac{2x}{m\pi} \cos mx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi} \cos mx \, dx = -\frac{2}{m} \cdot \cos m\pi +$$

$$+ \frac{2}{\pi m^2} \sin mx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{m} (-1)^m = \frac{2}{m} (-1)^{m+1}.$$

Par conséquent, le développement de la fonction $f(x)$ en série de Fourier est de la forme

$$f(x) = \pi + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx =$$

$$= \pi + 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots \right).$$

383. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-1, 1]$ par l'équation $f(x) = x^2$ (fig. 26).

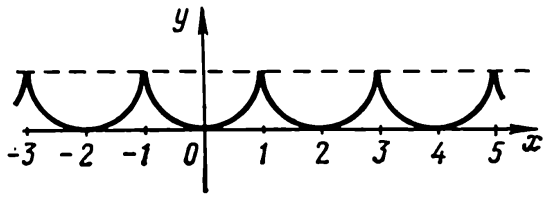

Fig. 26

S o l u t i o n. La fonction examinée est une fonction paire. Son graphique est un arc de parabole situé entre les points $(-1; 1)$ et $(1; 1)$. Ici $l = 1$; d'où il vient

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \, dx = 2 \int_0^l x^2 \, dx = \frac{2}{3},$$

$$a_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} \, dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos m\pi x \, dx.$$

Ici, il faut effectuer deux fois l'intégration par parties.

1) $u = x^2$, $dv = \cos m\pi x\, dx$, $du = 2x\, dx$, $v = \frac{1}{\pi m} \sin m\pi x$;

$$a_m = \frac{2x^2}{m\pi} \sin m\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{m\pi} \int_0^1 x \sin m\pi x\, dx = -\frac{4}{m\pi} \int_0^1 x \sin m\pi x\, dx.$$

2) $u = x$, $dv = \sin m\pi x\, dx$, $du = dx$, $v = -\frac{1}{m\pi} \cos m\pi x$;

$$a_m = \frac{4x}{m^2\pi^2} \cos m\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{m^2\pi^2} \int_0^1 \cos m\pi x\, dx = \frac{4}{m^2\pi^2} (-1)^m.$$

En sachant que la fonction examinée est une fonction paire, alors $b_m = 0$. Par conséquent,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos m\pi x =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \ldots \right).$$

384. Développer en série de Fourier la fonction donnée en demi-période sur le segment [0, 2] par l'équation $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.

Solution. La fonction peut être développée en série de Fourier par un nombre infini de procédés. Nous n'en citerons ici que deux qui sont les plus importants.

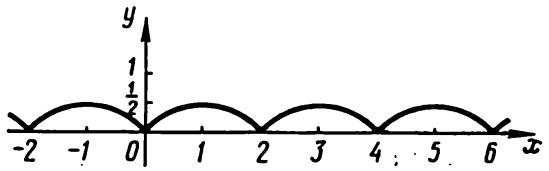

Fig. 27

a) Prolongeons la fonction $f(x)$ sur le segment [—2, 0] de façon paire (fig. 27):

$$l = 2,\ a_0 = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3},$$

$$a_m = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \cos \frac{m\pi x}{2}\, dx.$$

Intégrons par parties:

$$u = x - \frac{1}{2}x^2, \quad dv = \cos \frac{m\pi x}{2}\, dx,$$

$$du = (1-x)\,dx, \quad v = \frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2};$$

$$a_m = \frac{2}{m\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{m\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{m\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Reprenons l'intégration par parties:

$$u = 1-x, \quad dv = \sin\frac{m\pi x}{2}\,dx,$$

$$du = -dx, \quad v = -\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2};$$

$$a_m = \frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{m\pi x}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{4}{m^2\pi^2}\cos m\pi - \frac{4}{m^2\pi^2} = -\frac{4}{m^2\pi^2}[1+(-1)^m], \quad b_m = 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^m}{m^2}\cos\frac{m\pi x}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x + \frac{1}{4^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{6^2}\cos 3\pi x + \ldots\right).$$

b) Prolongeons la fonction $f(x)$ sur le segment $[-2, 0]$ de façon impaire (fig. 28):

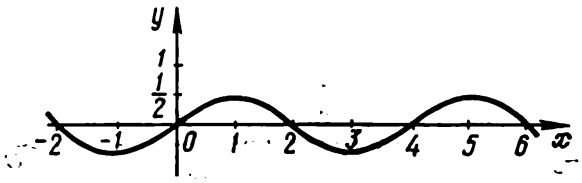

Fig. 28

$$b_m = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u = x - \frac{1}{2}x^2, \quad dv = \sin\frac{m\pi x}{2}\,dx,$$

$$du = (1-x)\,dx, \quad v = -\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m = -\frac{2}{m\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{m\pi}\int_0^2 (1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{m\pi}\int_0^2 (1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u = 1 - x, \quad dv = \cos\frac{m\pi x}{2}\,dx,$$

$$du = -dx, \quad v = \frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m = \frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2 \sin\frac{m\pi x}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{8}{m^3\pi^3}\cdot\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{8}{m^3\pi^3}\cos m\pi + \frac{8}{m^3\pi^3} = \frac{8}{m^3\pi^3}[1-(-1)^m];$$

$$a_m = 0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m^3}\sin\frac{m\pi x}{2} =$$

$$= \frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^3}\cdot\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^3}\cdot\sin\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right).$$

385. Développer en série de Fourier la fonction (fig. 29) don-

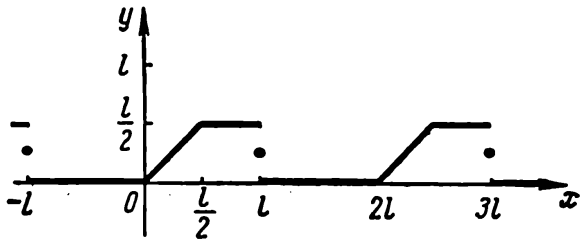

Fig. 29

née sur le segment $[-l,\ l]$ par les équations:

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{si} \quad -l \leqslant x \leqslant 0; \\ f(x) = x, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}; \\ f(x) = \frac{l}{2}, & \text{si} \quad \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Solution. On trouve

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}} f(x)\,dx+\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l} f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}} x\,dx+\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{l}{2}\,dx=\frac{1}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{1}{2}\,x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}=\frac{l}{8}+\frac{l}{4}=\frac{3}{8}\,l;$$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{l}{2}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Appliquons à la première intégrale l'intégration par parties:

$$u=x,\ dv=\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx,\ du=dx,\ v=\frac{l}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l},$$

d'où il vient

$$a_m=\frac{x}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\frac{1}{m\pi}\int_{0}^{\frac{l}{2}}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{l}{2m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}=$$

$$=\frac{l}{2m\pi}\cdot\sin\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}+$$

$$+\frac{l}{2m\pi}\left(\sin m\pi-\sin\frac{m\pi}{2}\right)=\frac{l}{m^2\pi^2}\left(\cos\frac{m\pi}{2}-1\right).$$

Calculons les coefficients b_m:

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Appliquons à la première intégrale l'intégration par parties:

$$u=x,\ dv=\sin\frac{m\pi x}{l}dx,\quad du=dx,\quad v=-\frac{l}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}.$$

On a

$$b_m=-\frac{x}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{m\pi x}{l}dx-\frac{l}{2m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}=$$

$$=-\frac{l}{2m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\frac{l}{2m\pi}\left(\cos m\pi-\cos\frac{m\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{l}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}-\frac{l}{2m\pi}(-1)^m.$$

Si $m=1$, alors $a_1=-\frac{l}{\pi^2}$, $b_1=\frac{l}{\pi^2}+\frac{l}{2\pi}=l\,\frac{2+\pi}{2\pi^2}$.

Si $m=2$, alors $a_2=-\frac{l}{2\pi^2}$, $b_2=-\frac{l}{4\pi}$.

Si $m=3$, alors $a_3=-\frac{l}{9\pi^2}$, $b_3=-\frac{l}{9\pi^2}+\frac{l}{6\pi}=l\cdot\frac{3\pi-2}{18\pi^2}$.

Si $m=4$, alors $a_4=0$, $b_4=-\frac{l}{8\pi}$.

Si $m=5$, alors $a_5=-\frac{l}{25\pi^2}$, $b_5=\frac{l}{25\pi^2}+\frac{l}{10\pi}=l\cdot\frac{2+5\pi}{50\pi^2}$.

. . . . . .

Par conséquent,

$$f(x)=l\left[\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\right.$$
$$+\left(-\frac{1}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{l}-\frac{1}{4\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\frac{-2+3\pi}{18\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{l}\right)+\ldots\right].$$

386. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-\pi, \pi]$ par l'équation $f(x)=x$.

Réponse. $f(x)=-2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin mx}{m}$.

387. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-1, 1]$ par l'équation $f(x)=|x|$.

Réponse. $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$.

388. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-\pi, \pi]$ par l'équation $f(x) = e^x$.

Réponse. $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2+1} (\cos mx - m \sin mx)\right]$.

389. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-\pi, \pi]$ par l'équation $f(x) = x^3$.

Réponse. $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{12}{m^3} - \frac{2\pi^2}{m}\right) \cdot \sin mx$.

390. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[0, \pi]$ par l'équation $f(x) = \pi - 2x$: a) en la prolongeant sur $[-\pi, 0]$ de façon paire; b) en la prolongeant de façon impaire.

Réponse. a) $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$;

b) $f(x) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mx}{m}$.

391. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-\pi, \pi]$ par les équations

$$\begin{cases} f(x) = -h, & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0; \\ f(x) = h, & \text{si} \quad 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Réponse. $f(x) = \frac{4h}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$.

392. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[-\pi, \pi]$ par les équations

$$\begin{cases} f(x) = -2x, & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0; \\ f(x) = 3x, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Réponse.

$$f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \\ + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots\right).$$

393. Développer en série de Fourier la fonction donnée sur le segment $[0, \pi]$ par l'équation $f(x) = x^2$ en la prolongeant de façon impaire sur $[-\pi, 0]$.

Réponse.

$$f(x)=2\pi\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)-$$
$$-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\ldots\right).$$

394. Développer en série de Fourier sur le segment $[-\pi, \pi]$ la fonction

$$f(x)=\begin{cases} -x \text{ pour } & -\pi<x<0, \\ 0 \text{ pour } & 0<x<\pi. \end{cases}$$

Réponse. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}+\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1^m)\cdot\frac{\sin mx}{m}.$

395. Développer suivant les sinus sur le segment $[0, \pi]$ la fonction $f(x) = \cos 2x$.

Réponse. $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right].$

396. Développer suivant les sinus sur le segment $[0, 1]$ la fonction $f(x) = x$.

Réponse. $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot\frac{\sin m\pi x}{m}.$

397. Développer suivant les cosinus sur le segment $[0, 2]$ la fonction

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{pour } 0<x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{pour } 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

Réponse. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}.$

§ 9. Intégrale de Fourier

Si une fonction $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet sur tout segment fini appartenant à l'axe Ox et qu'elle est absolument intégrable tout au long de cet axe $\left(\text{c'est-à-dire que } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx \text{ converge}\right)$, on dit alors que pour cette fonction est valable la *formule intégrale de Fourier* (obtenue à partir de la série de Fourier en passant à la limite lorsque $l\to\infty$):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)\,du$$

(aux points de discontinuité de première espèce on prend comme auparavant pour la valeur de $f(x)$ l'expression $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, où x_0 est l'abscisse du point de discontinuité).

L'intégrale de Fourier peut être mise sous *forme complexe*:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{iz(u-x)}\, du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx}\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu} f(u)\, du.$$

Pour une fonction p a i r e, l'intégrale de Fourier peut être présentée sous la forme

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos zx\, dz \int_{0}^{\infty} f(u)\cos zu\, du \quad (f(-x)=f(x)),$$

et pour une fonction i m p a i r e, sous la forme

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin zx\, dz \int_{0}^{\infty} f(u)\sin zu\, du \quad (f(-x)=-f(x)).$$

Les trois dernières formules sont liées aux transformations dites transformations intégrales de Fourier:

1. *Transformation de Fourier sous sa forme générale*:

$$\begin{cases} F(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x)\, dx & (\textit{directe}), \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} F(z)\, dz & (\textit{inverse}). \end{cases}$$

2. *Cosinus-transformation de Fourier* (pour les fonctions paires):

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos zx\, dx \qquad (\textit{directe})$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f_c(z)\cos zx\, dz \qquad (\textit{inverse}).$$

3. *Sinus-transformation de Fourier* (pour les fonctions impaires):

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin zx\, dx \qquad (\textit{directe}),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f_s(z)\sin zx\, dz \qquad (\textit{inverse}).$$

Les sinus- et cosinus-transformations de Fourier peuvent s'appliquer à des fonctions données seulement sur le demi-axe positif de Ox, à condition qu'elles soient absolument intégrables le long de ce demi-axe et satisfassent aux conditions de Dirichlet sur tout segment fini de ce demi-axe. Dans ces conditions, la sinus-transformation prolonge la fonction $f(x)$ sur le demi-axe négatif de façon impaire, alors que la cosinus-transformation le fait de façon paire.

N o t a. Dans les formules intégrales de Fourier, toutes les intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$ sont considérées en tant que *valeur principale*, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(u)\,du.$$

398. Trouver les cosinus- et sinus-transformations de la fonction $f(x) = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$.

S o l u t i o n. On a

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} \cos zu\,du.$$

En sachant que $\int_0^\infty e^{-u} \cos zu\,du = \frac{1}{z^2+1}$, alors

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{z^2+1}.$$

D'une manière analogue, on obtient

$$f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z}{z^2+1}.$$

Par ailleurs, en appliquant les cosinus- et sinus-transformations de Fourier aux fonctions $f_c(z)$ et $f_s(z)$, on obtient la fonction $f(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos zx}{z^2+1}\,dz = e^{-x},$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z \sin zx}{z^2+1}\,dz = e^{-x}.$$

D'où l'on tire les *intégrales de Laplace* :

$$\int_0^\infty \frac{\cos zx}{z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{2} e^{-x},$$

$$\int_0^\infty \frac{z \sin zx}{z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

399. Soit $f(x)$ une fonction définie par les équations

$$\begin{cases} f(x)=1, & \text{si } 0\leqslant x<a; \\ f(x)=\frac{1}{2}, & \text{si } x=a; \\ f(x)=0, & \text{si } x>a. \end{cases}$$

Trouver ses cosinus- et sinus-transformations (fig. 30).

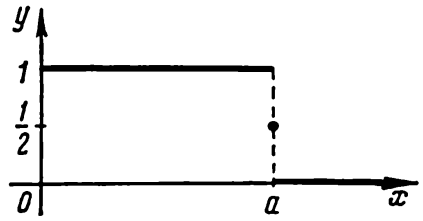

Fig. 30

S o l u t i o n. La cosinus-transformation de cette fonction est:

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos zu\,du+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty 0\cdot\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin az}{z}.$$

La sinus-transformation est:

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\sin zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \sin zu\,du+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty 0\cdot\sin zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \sin zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos az}{z}.$$

Après avoir trouvé les cosinus- et sinus-transformations des fonctions $f_c(z)$ et $f_s(z)$, on obtient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\cos xz\,dz=\begin{cases} 1, & \text{si } 0\leqslant x<a; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x=a; \\ 0, & \text{si } x>a, \end{cases}$$

(*facteur de discontinuité de Dirichlet*) et

$$\frac{2}{\pi}\int_0 \frac{1-\cos az}{z}\sin xz\,dz=\begin{cases} 1, & \text{si } 0\leqslant x<a; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x=a; \\ 0, & \text{si } x>a. \end{cases}$$

400. Trouver la transformation de Fourier de la fonction

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}; \\ 1, & \text{si } |x|<\frac{1}{2}; \\ -x+1, & \text{si } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1; \\ 0, & \text{si } 1<|x|. \end{cases}$$

Solution. D'après la formule de transformation de Fourier

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{izu}\,du,$$

en utilisant le type de la fonction $f(x)$, on trouve que

$$\sqrt{2\pi}\,F(z)=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot e^{izu}\,du+\int_{-1}^{-1/2}(u+1)\,e^{izu}\,du+$$

$$+\int_{-1/2}^{1/2} 1\cdot e^{izu}\,du+\int_{1/2}^{1}(-u+1)\,e^{izu}\,du+\int_{1}^{\infty} 0\cdot e^{izu}\,du.$$

Il est évident que la première et la dernière intégrales sont nulles. Désignons les intégrales restantes respectivement par I_1, I_2, I_3 et calculons-les:

$$I_1=\int_{-1}^{-1/2}(u+1)\,e^{izu}\,du=\left[\frac{1}{zi}(u+1)\,e^{izu}-\frac{1}{i^2z^2}\,e^{izu}\right]_{-1}^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{zi}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{iz}{2}}-\frac{1}{i^2z^2}\,e^{-\frac{iz}{2}}+\frac{1}{i^2z^2}\,e^{-iz}=$$

$$=\frac{1}{2zi}\,e^{-\frac{zi}{2}}+\frac{1}{z^2}\,e^{-\frac{zi}{2}}-\frac{1}{z^2}\,e^{-zi};$$

$$I_2=\int_{-1/2}^{1/2} e^{izu}\,du=\frac{1}{zi}\,e^{izu}\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{zi}\left(e^{\frac{zi}{2}}-e^{-\frac{zi}{2}}\right)=\frac{2\sin\frac{z}{2}}{z};$$

$$I_3=\int_{1/2}^{1}(-u+1)\,e^{izu}\,du=\left[\frac{1}{zi}(-u+1)\,e^{izu}+\frac{1}{i^2z^2}\,e^{izu}\right]_{1/2}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{z^2}\,e^{zi}-\frac{1}{2zi}\,e^{\frac{zi}{2}}+\frac{1}{z^2}\,e^{\frac{zi}{2}}.$$

Ainsi,

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2zi}e^{-\frac{zi}{2}}+\frac{1}{z^2}e^{-\frac{zi}{2}}-\frac{1}{z^2}e^{-zi}+\frac{2\sin\frac{z}{2}}{z}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z^2}e^{zi}-\frac{1}{2zi}e^{\frac{zi}{2}}+\frac{1}{z^2}e^{\frac{zi}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2\cos z}{z^2}+\frac{\sin\frac{z}{2}}{z}+\frac{2\cos\frac{z}{2}}{z^2}\right).$$

401. Trouver la transformation de Fourier de la fonction

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & \text{si } |x|\leqslant\pi;\\ 0, & \text{si } |x|>\pi.\end{cases}$$

Réponse. $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{!4}{1-4z^2}\cos\pi z.$

402. Trouver la transformation de Fourier de la fonction

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & \text{si } -1\leqslant x<0;\\ e^{-x}, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{si } |x|>1.\end{cases}$$

Réponse. $F(z)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{ze-\sin z-z\cos z}{e(1+z^2)}.$

403. Trouver les sinus- et cosinus-transformations de Fourier de la fonction

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2};\\ 0, & \text{si } -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2};\\ 1, & \text{si } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Réponse. $f_c(z)=\frac{\sin z-\sin\frac{z}{2}}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}},$

$$f_s(z)=\frac{\cos\frac{z}{2}-\cos z}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

§ 1. Equations différentielles du premier ordre

1. Notions fondamentales. On appelle *équation différentielle* une équation établissant une relation entre les variables indépendantes, leur fonction et les dérivées (ou différentielles) de cette fonction. Si l'équation est d'une seule variable elle est dite *ordinaire*; en cas de deux ou de plusieurs variables, l'équation est appelée *équation* différentielle *aux dérivées partielles.*

On appelle *ordre* d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation. Par exemple:

1) $x^2y' + 5xy = y^2$ est une équation différentielle ordinaire du premier ordre;

2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} = x^2$ est une équation différentielle ordinaire du second ordre;

3) $y'^3 + y''\cdot y''' = x$ est une équation différentielle ordinaire du troisième ordre;

4) $F(x, y, y', y'') = 0$ est le type général d'équation différentielle ordinaire du second ordre;

5) $x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ est une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans ce chapitre, on étudie les équations différentielles ordinaires du premier ordre, c'est-à-dire les équations de la forme $F(x, y, y') = 0$ ou (en l'explicitant par rapport à y') $y' = f(x, y)$.

On appelle *solution* d'une équation différentielle une fonction différentiable $y = \varphi(x)$ qui, substituée à la fonction inconnue, transforme cette équation en une identité.

On appelle *solution générale* d'une équation du premier ordre une fonction $y = \varphi(x, C)$ qui, pour toute valeur de la constante arbitraire C, constitue une solution de l'équation donnée.

Le graphique construit dans le plan xOy pour toute solution $y = \varphi(x)$ de l'équation différentielle donnée est appelé *courbe intégrale* de cette équation. Ainsi donc, à la solution générale $y = \varphi(x, C)$ on met en correspondance une famille de courbes intégrales qui sont fonction d'un seul paramètre: la constante arbitraire C.

Parmi toutes les solutions d'une équation différentielle définies par sa solution générale, on exige bien souvent d'avoir une solution telle que les conditions $y = y_0$, pour $x = x_0$, où x_0 et y_0 sont des nombres donnés, soient vérifiées. Cela signifie, au point de vue géométrique, qu'on a besoin de trouver une courbe intégrale passant par un point donné $M(x_0; y_0)$ du plan.

Ces *conditions* ($y = y_0$ pour $x = x_0$), dites *initiales*, s'écrivent alors de façon succincte:

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{ou} \quad y|_{x=x_0} = y_0.$$

Les solutions qui s'obtiennent à partir de la solution générale $y = \varphi(x, C)$, pour une valeur déterminée de la constante arbitraire C, sont appelées solutions *particulières*.

Le problème de recherche d'une solution particulière vérifiant les conditions initiales $y = y_0$ pour $x = x_0$ est appelé *problème de Cauchy*.

Toutefois, on rencontre des équations différentielles admettant des solutions qui ne s'obtiennent pas à partir de la solution générale, quelles que soient les valeurs de C (y compris $C = \pm\infty$). De telles solutions sont dites *singulières*. En procédant par essais, on peut se convaincre, par exemple, que l'équation $y' = \sqrt{1 - y^2}$ admet la solution générale $y = \sin(x + C)$, alors que la fonction $y = 1$, qui ne peut pas être obtenue à partir de la solution générale quelles que soient les valeurs de C, est quand même une solution de l'équation en question. Il s'agit donc d'une solution singulière.

Le graphique d'une solution singulière est la courbe intégrale qui en chacun de ses points admet une tangente commune à l'une des courbes intégrales définies par la solution générale. (Une telle courbe est dite *enveloppe* de la famille de courbes intégrales.)

La recherche des solutions d'une équation différentielle est appelée *intégration* de cette équation différentielle.

2. Equations différentielles à variables séparables. Une équation différentielle de la forme

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)\,dy = 0$$

se rapporte aux équations à variables séparables. Si aucune des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ n'est pas identiquement nulle, alors l'équation intéressée se ramène à la forme

$$\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy + \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = 0$$

en divisant l'équation initiale par $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$. Une intégration terme à terme de la dernière équation donne la relation

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = C,$$

qui fournit alors (sous forme implicite) la solution de l'équation initiale. (On appelle *intégrale* d'une équation différentielle la solution de cette équation donnée sous forme implicite.)

404. Trouver l'intégrale particulière de l'équation $y'\cdot\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$.

Solution. En posant $y' = \dfrac{dy}{dx}$, recopions l'équation donnée sous la forme

$$\cos x\,\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}.$$

Séparons les variables :

$$\frac{\ln y}{y}\,dy = \frac{dx}{\cos x}.$$

Intégrons les deux membres de l'équation :

$$\int \frac{\ln y}{y}\,dy = \int \frac{dx}{\cos x} + C; \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Compte tenu des conditions initiales ($x = 0$, $y = 1$), on trouve $C = 0$. On obtient finalement

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

405. Trouver l'intégrale générale de l'équation $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

S o l u t i o n. En posant $y' = \frac{dy}{dx}$ et en séparant les variables, on obtient l'équation $\operatorname{ctg} y\, dy = \operatorname{tg} x\, dx$.

Par intégration on trouve : $\int \operatorname{ctg} y\, dy = \int \operatorname{tg} x\, dx$, ou $\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C$. (Ici, il est plus commode de désigner la constante d'intégration par $\ln C$.)

D'où l'on tire $\sin y = \frac{C}{\cos x}$, ou $\sin y \cos x = C$ (intégrale générale).

406. Trouver la solution particulière de l'équation différentielle $(1 + x^2)\, dy + y\, dx = 0$, pour les conditions initiales $y(1) = 1$.

S o l u t i o n. Ramenons la présente équation à la forme $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. En intégrant, on obtient $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}$, ou $\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C$. C'est ce qu'on appelle intégrale générale de l'équation donnée.

Introduisons maintenant les conditions initiales et calculons la constante arbitraire C :

$$\ln 1 = -\operatorname{arctg} 1 + C, \text{ c'est-à-dire } C = \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent,

$$\ln y = -\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4},$$

d'où l'on tire la solution particulière cherchée :

$$y = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}.$$

Résolvons quelques problèmes de géométrie et de physique à l'aide des équations différentielles du type examiné.

407. Trouver les courbes dont la somme des longueurs de la normale et de la sous-normale est une valeur constante égale à a.

S o l u t i o n. La longueur de la sous-normale est égale à $|yy'|$, alors que la longueur de la normale est $|y\sqrt{1+y'^2}|$. Ainsi, l'équation qui doit être vérifiée par les courbes cherchées est de la forme

$$|yy'| + |y\sqrt{1+y'^2}| = a.$$

En résolvant cette équation par rapport à y', on trouve (en prenant en considération les deux signes possibles) :

$$y' = \pm\frac{a^2-y^2}{2ay}.$$

Séparons les variables :

$$\frac{2y\,dy}{a^2-y^2}=\pm\frac{dx}{a}.$$

En intégrant, on obtient l'intégrale générale $\ln|a^2-y^2|=\pm\frac{x}{a}+$ $+\ln C$. En passant des logarithmes aux nombres, on ramène l'équation des courbes cherchées à la forme

$$y^2=a^2-Ce^{\pm\frac{x}{a}}.$$

La condition du problème n'est satisfaite que par les valeurs de $C>0$. En effet, à partir de l'équation de la famille de courbes on trouve :

$$|yy'|=\frac{|a^2-y^2|}{2a},\quad |y\sqrt{1+y'^2}|=\frac{a^2+y^2}{2a}.$$

Ainsi, pour que la condition $|yy'|+|y\sqrt{1+y'^2}|=a$ soit vérifiée, il faut que $|a^2-y^2|=a^2-y^2$, c est-à-dire que $y^2<a^2$; on en déduit notamment que C ne prend que des valeurs positives.

408. Un réservoir cylindrique de hauteur 6 m et de diamètre de base 4 m est placé verticalement et rempli d'eau. En combien de temps l'eau remplissant le réservoir s'en écoulera-t-elle par une ouverture circulaire de rayon $\frac{1}{12}$ m pratiquée dans le fond du réservoir ?

S o l u t i o n. Pour résoudre le problème posé, il faut s'adresser à la formule de Bernoulli définissant la vitesse v (en m/s) d'écoulement d'un liquide par un orifice pratiqué dans un réservoir et situé à h mètres au-dessous de la surface libre du liquide :

$$v=\sigma\sqrt{2gh}.$$

Ici, $g=9{,}8$ m/s² est l'accélération de la pesanteur, σ un coefficient constant (sans dimension) qui dépend des propriétés du liquide (pour l'eau $\sigma\approx 0{,}6$).

Soit h m le niveau de l'eau qui reste dans le réservoir au bout du temps t s après le début de l'écoulement. Ce niveau baisse encore de dh m ($dh<0$) pendant le temps dt s. Calculons de deux manières différentes le volume d'eau qui s'est écoulé pendant cet intervalle de temps infiniment petit dt.

1. Primo, ce volume $d\omega$ est égal au volume d'une couche cylindrique de hauteur $|dh|$ et de rayon égal au rayon r de la base du réservoir ($r=2$ m). Ainsi donc, $d\omega=\pi r^2\,|dh|=-\pi r^2\,dh$.

2. Secundo, ce volume est égal au volume d'un cylindre ayant pour base l'ouverture pratiquée dans le fond du réservoir, sa hauteur étant égale à $v\,dt$ (où v est la vitesse d'écoulement). Si le rayon de l'ouverture est égal à ρ ($\rho=\frac{1}{12}$ m), alors $d\omega=\pi\rho^2\,v\,dt=$ $=\pi\rho^2\sigma\cdot\sqrt{2gh}\,dt$.

En égalant entre elles ces deux expressions, car elles donnent le même volume, on obtient l équation

$$-r^2\,dh = \sigma\rho^2\sqrt{2gh}\,dt.$$

Séparons les variables :

$$dt = -\frac{r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

En intégrant, on trouve

$$t = C - \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

Pour $t=0$, $h=h_0=6$ m. D'où l'on tire

$$C = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0}.$$

Donc, la liaison entre t et h est définie par l'équation

$$t = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}),$$

alors que le temps d'écoulement total T sera trouvé en posant dans cette formule $h = 0$:

$$T = \frac{2r^2\sqrt{h_0}}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}.$$

En utilisant les données du problème ($r = 2$ m, $h_0 = 6$ m, $\sigma = 0{,}6$, $\rho = \frac{1}{12}$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2), on trouve :

$$T \approx 1062 \text{ s} \approx 17{,}7 \text{ mn}.$$

409. Dans une chambre dont la température est de 20 °C, un corps s'est refroidi de 100° à 60 °C en 20 mn. On demande de trouver la loi de refroidissement du corps ; en combien de minutes sa température tombera-t-elle à 30 °C ? Toute élévation de température dans la chambre est à négliger.

S o l u t i o n. En vertu de la loi de Newton (la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence de températures), on peut écrire $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$, ou $\frac{dT}{T-20} = k\cdot dt$, d'où $\ln(T-20) = kt + \ln C$. Pour $t = 0$, $T = 100°$; d'où l'on trouve $C = 80$. Pour $t = 20$, $T = 60°$, par conséquent, $\ln 40 = 20k + \ln 80$, d'où $k = -\frac{1}{20}\ln 2$. Donc, on a finalement : $T - 20 = 80\cdot e^{-\frac{1}{20}t\cdot\ln 2} = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, ou $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Pour $T = 30°$, on a $10 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, ou $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{8}$. Ainsi; $\frac{t}{20} = 3$, d'où $t = 60$ mn.

410. Calculer le temps nécessaire à l'établissement de l'équilibre d'un liquide contenu dans deux vases communicants. Le petit orifice entre les vases est de surface ω m². L'aire de la section horizontale du premier vase est égale à S_1 m², celle du second à S_2 m²; au moment initial, le niveau du liquide dans le premier vase se situait à une hauteur de h_1 m au-dessus de l'orifice; dans le second, à une hauteur de h_2 m ($h_2 < h_1$).

Solution. Soit t s le temps (à compter dès le commencement de l'écoulement du liquide) pendant lequel le niveau de l'eau dans le premier vase a baissé à z_1 m, alors que dans le second, il s'est élevé à z_2 m. Par la suite, pendant un intervalle de temps infiniment petit dt s, le niveau du liquide dans le premier vase a baissé de dz_1 m ($dz_1 < 0$), tandis que dans le second, il s'est élevé de dz_2 m ($dz_2 > 0$).

Vu le fait que la diminution du volume de liquide dans le premier vase est égale à son augmentation dans le second, on a : $S_1\,|dz_1| = S_2\,|dz_2|$, ou $-S_1dz_1 = S_2dz_2$, d'où $dz_2 = -\frac{S_1}{S_2}\,dz_1$.

Si l'on introduit la notation $u = z_1 - z_2$, alors la vitesse d'écoulement du liquide par l'orifice entre les vases peut être trouvée d'après la formule $v = \sigma\sqrt{2gu}$; elle est définie par la formule de Bernoulli (cf. problème 408) dans laquelle il faut poser que l'orifice se situe à une profondeur $u = z_1 - z_2$ au-dessous de la surface libre du liquide.

Aussi, le volume de liquide qui s'écoule pendant un temps dt est-il égal, en vertu de ce qui précède, à $-S_1dz_1$ et en même temps à $v\omega\,dt = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt$.

En égalant entre elles ces expressions pour un seul et même volume, on obtient l'équation

$$-S_1\,dz_1 = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt.$$

Mais $du = dz_1 - dz_2 = dz_1 + \frac{S_1}{S_2}\,dz_1$. Ainsi donc, $dz_1 = \frac{S_2}{S_1+S_2}\,du$.

En substituant dans l'équation précédente l'expression de dz_1 ainsi obtenue, on trouve l'équation différentielle reliant u et t :

$$-\frac{S_1S_2}{S_1+S_2}\,du = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt,$$

ou

$$dt = -\frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

En intégrant, on détermine t :

$$t = C - \frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{u}.$$

Pour $t=0$, $u=h_1-h_2$, d'où $C=\frac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\sigma\omega\sqrt{2g}}$. Le temps T cherché, nécessaire à établir l'équilibre des niveaux dans les vases, sera trouvé en posant $u=0$:

$$T=C=\frac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\sigma\omega\sqrt{2g}}.$$

Résoudre les équations:

411. $\ln\cos y\,dx+x\operatorname{tg} y\,dy=0$.

Réponse. $y=\arccos(e^{Cx})$.

412. $\frac{yy'}{x}+e^y=0$. Conditions initiales: $y(1)=0$.

Réponse. $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$.

413. $3e^x\cdot\operatorname{tg} y\,dx+(1+e^x)\sec^2 y\,dy=0$. Conditions initiales: $y(0)=\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $(1+e^x)^3\cdot\operatorname{tg} y=8$.

414. $e^{1+x^2}\cdot\operatorname{tg} y\,dx-\frac{e^{2x}}{x-1}dy=0$. Conditions initiales: $y(1)=\frac{\pi}{2}$.

Réponse. $2\ln|\sin y|=e^{(x-1)^2}-1$.

415. $(1+e^{2x})y^2\,dy=e^x\,dx$. Conditions initiales: $y(0)=0$.

Réponse. $\frac{1}{3}y^3+\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} e^x$.

416. $y'+\cos(x+2y)=\cos(x-2y)$. Conditions initiales: $y(0)=\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $\ln|\operatorname{tg} y|=4(1-\cos x)$.

417. $y'=2^{x-y}$.

Réponse. $2^x-2^y=C$.

418. $y\cdot\ln^3 y+y'\sqrt{x+1}=0$. Conditions initiales: $y\left(-\frac{15}{16}\right)=e$.

Réponse. $y=e^{\pm\frac{1}{2\sqrt[4]{x+1}}}$.

419. $\frac{y}{y'}=\ln y$. Conditions initiales: $y(2)=1$.

Réponse. $2(x-2)=\ln^2 y$.

420. $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$.

Réponse. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$.

421. $\frac{x\,dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{y\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$.

Réponse. $(1-\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-y^2})=Cxy$.

422. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

Réponse. $2\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|=C$.

423. $yy' = -2x \cdot \sec y$.

Réponse. $x^2 + y \sin y + \cos y = C$.

424. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$. Conditions initiales: $y(0) = 0$.

Réponse. $y = \ln \operatorname{tg}\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$.

425. $y' = \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)$.

Réponse. $y = \ln \operatorname{tg}(\operatorname{ch} x + C)$.

426. $y' = \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2 - x^2}}$.

Réponse. $y = a \cdot \sin\left(\arcsin \frac{x}{a} + C\right)$.

Nota. On peut écrire la réponse sous la forme de $y\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - y^2} = C_1$.

427. $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$. Conditions initiales: $y(1) = 1$.

Réponse. $x + y + 2\ln x - \ln y = 2$.

428. $x(y^6 + 1)\,dx + y^2(x^4 + 1)\,dy = 0$. Conditions initiales: $y(0) = 1$.

Réponse. $3 \operatorname{arctg} x^2 + 2 \operatorname{arctg} y^3 = \frac{\pi}{2}$.

429. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})\,dy = 0$.

Réponse. $x + y - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\ln|(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} - 1)| = C$.

430. $\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin y}} + y' = 0$. Conditions initiales: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Réponse. $\sqrt{2} \sin x + \sin y - \cos y = 0$.

431. $y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$.

Réponse. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = C\left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} + 1\right)\left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$.

432. $\frac{4 + y^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}} = \frac{3y + 2}{x + 1} y'$.

Réponse. $\frac{3}{2} \ln(y^2 + 4) + \operatorname{arctg} \frac{y}{2} = \sqrt{x^2 + 4x + 13} - \ln\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}\right) + C$.

433. $\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} y\,dx + \sec^2 y \cdot \operatorname{tg} x\,dy = 0$. Conditions initiales: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Réponse. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$.

434. $5e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1 - e^x) \sec^2 y\,dy = 0$.

Réponse. $y = \operatorname{arctg} C(1 - e^x)^5$.

435. Déterminer la courbe dont le segment de la tangente compris entre les axes de coordonnées est divisé en deux parties égales par le point de tangence.

Réponse. $y = \frac{C}{x}$.

436. La vitesse de dévalorisation d'un équipement par suite de l'usure de celui-ci est proportionnelle à chaque moment donné à son coût réel. Le coût initial étant A_0, dire quelle sera la valeur de l'équipement après t ans ?

Réponse. $A_t = A_0 e^{-kt}$.

437. Une matière quelconque se transforme en une autre à une vitesse proportionnelle à la quantité de matière non transformée. On connaît qu'à l'écoulement d'une heure la quantité de la première matière est de 31,4 g et qu'au bout de trois heures il en reste 9,7 g. Déterminer :

1) la quantité de matière que l'on avait au début du processus ;

2) en combien de temps après le début du processus il restera 1% de la quantité d'origine.

Réponse. 1) $\approx 56{,}5$ g, 2) $\approx 7{,}84$ h.

438. Un réservoir cylindrique de longueur 6 m et de diamètre 4 m est placé horizontalement. En combien de temps le réservoir sera-t-il vide si l'orifice de rayon 1/12 m se situe au niveau de la plus basse des génératrices du cylindre ?

Réponse. $\approx 18{,}4$ mn.

439. Un entonnoir conique d'orifice ω cm² et d'angle au sommet du cône 2α est rempli d'eau jusqu'au niveau de H cm au-dessus de l'orifice. Trouver la dépendance entre la hauteur variable du niveau de l'eau h dans l'entonnoir et le temps d'écoulement t. Calculer le temps d'écoulement total. Calculer ce temps pour $\omega = 0{,}1$ cm², $\alpha = 45°$, $H = 20$ cm.

Réponse. $t = \frac{2}{5} \frac{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sigma\omega \sqrt{2g}} [H^{5/2} - h^{5/2}]$;

$$T = \frac{2}{5} \frac{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sigma\omega \sqrt{2g}} H^{5/2} \approx 844 \text{ s} \approx 14{,}1 \text{ mn}.$$

440. Déterminer le temps pendant lequel toute l'eau s'écoulera d'un entonnoir conique si l'on connaît que celui-ci se vide à moitié en 2 mn.

Réponse. $\approx 4{,}6$ mn.

3. Equations différentielles homogènes. Une équation de la forme $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ est appelée *homogène* si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions homogènes du même degré. On dit que la fonction $f(x, y)$ est une fonction *homogène de degré m* si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Une équation homogène peut être ramenée à la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. La substitution $y = tx$ ramène cette équation à une équation à variables séparables par rapport à la nouvelle fonction inconnue t.

441. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$(x^2 + 2xy)\,dx + xy\,dy = 0.$$

Solution. Dans l'équation donnée, $P(x, y) = x^2 + 2xy$ et $Q(x, y) = xy$. Les deux fonctions sont des fonctions homogènes du second degré. Faisons la substitution $y = tx$, d'où $dy = x\,dt + t\,dx$. Alors l'équation prend la forme

$$(x^2 + 2x^2t)\,dx + tx^2\,(x\,dt + t\,dx) = 0,$$

ou

$$(x^2 + 2x^2t + t^2x^2)\,dx + tx^3dt = 0.$$

En séparant les variables et en intégrant, on trouve successivement :

$$\frac{dx}{x} + \frac{t\,dt}{(t+1)^2} = 0, \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{t\,dt}{(t+1)^2} = C;$$

transformons la seconde intégrale :

$$\ln|x| + \int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,dt = C,$$

ou

$$\ln|x| + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} = C.$$

En revenant à l'ancienne fonction inconnue $y\left(t = \frac{y}{x}\right)$, on trouve la réponse finale :

$$\ln|x+y| + \frac{y}{x+y} = C.$$

442. Trouver la solution particulière de l'équation $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ pour les conditions initiales $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Solution. En faisant la substitution $\frac{y}{x} = t$; $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$, on obtient l'équation $x\,dt + t\,dx = (t + \sin t)\,dx$, ou $x\,dt = \sin t\,dx$; séparons les variables :

$$\frac{dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}.$$

En intégrant, on trouve $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$, d'où $\frac{t}{2} = \operatorname{arctg} Cx$. En faisant le remplacement inverse $\left(t = \frac{y}{x}\right)$, on trouve la solution générale de l'équation initiale $y = 2x \operatorname{arctg} Cx$.

Substituons les conditions initiales données : $\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arctg} C$, d'où $C = 1$. La solution particulière cherchée est

$$y = 2x \cdot \operatorname{arctg} x.$$

443. Trouver une courbe passant par le point $A(0; 1)$ telle que le triangle formé par l'axe Oy, la tangente à la courbe en un point

quelconque de celle-ci et le rayon vecteur du point de tangence soit un triangle isocèle dont la base est représentée par le segment de la tangente compris entre le point de tangence et l'axe Oy.

Solution. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe cherchée. Traçons une tangente MN en un point quelconque de la courbe $M(x; y)$ jusqu'à l'intersection avec l'axe Oy au point N (fig. 31).

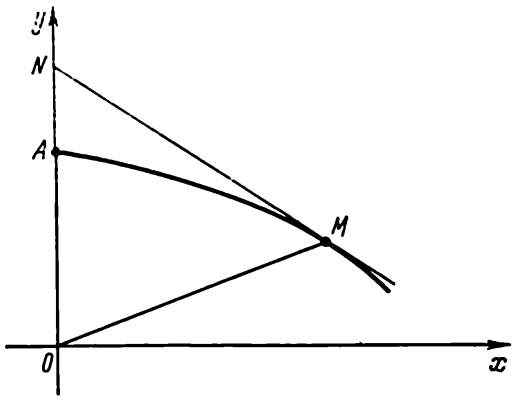

Fig. 31

L'égalité $ON = OM$ doit être valable alors; mais $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$; à partir de l'équation de la tangente $Y - y = y'(X - x)$ on trouve, en posant $X = 0$:

$$Y = ON = y - xy'.$$

On obtient une équation homogène

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'.$$

En posant $y = tx$, après changement et séparation des variables, on obtient l'équation

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{dx}{x},$$

d'où l'on tire

$$\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = \ln C - \ln x,$$

ou

$$x^2 = C(C - 2y)$$

(famille de paraboles d'axe Oy).

En substituant les coordonnées du point A dans la solution générale trouvée on obtient $0 = C(C - 2)$; des deux valeurs de C ($C = 0$ et $C = 2$) n'est valable que la seconde du fait que, pour $C = 0$. la parabole dégénère en l'axe Oy.

Ainsi donc, la courbe cherchée est la parabole

$$x^2 = 4(1 - y),$$

ou

$$y = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

444. Trouver la forme d'un miroir concentrant en un point tous les rayons parallèles.

Solution. Il est évident que le miroir doit présenter la forme d'une surface de révolution dont l'axe est parallèle à la direction des rayons incidents. Prenons en qualité d'un tel axe l'axe Ox et trouvons l'équation de la courbe $y = f(x)$ dont la rotation autour de l'axe Ox forme la surface cherchée.

Plaçons l'origine des coordonnées au point où sont concentrés les rayons réfléchis. Désignons le rayon incident par KM, et le rayon réfléchi par MO (fig. 32). Traçons la tangente TT_1 et la normale MN au point M de la courbe cherchée. Alors le triangle OMT est un triangle isocèle de sommet au point O (du fait que $\angle OMT = \angle KMT_1 = \angle OTM = \alpha$). D'où $OM = OT$, où $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $OT = -x + \frac{y}{y'}$.

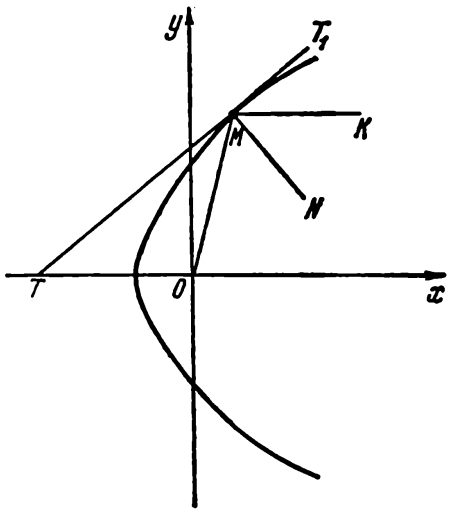

Fig. 32

(A partir de l'équation de la tangente $Y - y = y'(X - x)$, on trouve, en posant $Y = 0$: $X = x - \frac{y}{y'}$; d'où $OT = |X| = -X = \frac{y}{y'} - x$.)

Ainsi donc, on a l'équation différentielle

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'} \quad \text{ou} \quad (x + \sqrt{x^2 + y^2})\, y' = y.$$

En multipliant par dx, recopions l'équation sous la forme

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2})\, dy - y\, dx = 0.$$

Cette équation différentielle est homogène. Pour effectuer son intégration, il est utile d'effectuer la substitution $x = ty$, en prenant y pour variable, x (et t) étant des fonctions inconnues de cette variable. On aura alors

$$(\sqrt{t^2y^2 + y^2} + ty)\, dy - y\,(t\, dy + y\, dt) = 0,$$

ou

$$\sqrt{t^2 + 1}\, dy - y\, dt = 0.$$

Séparons les variables et intégrons :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \ln y=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+\ln C.$$

On en déduit $y = C\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$ ou, en revenant aux variables initiales x et y,

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2}{C}.$$

Après simplification, on trouve la solution définitive sous la forme

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

La courbe cherchée est une parabole, alors que le miroir a la forme d'un paraboloïde de révolution.

445. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles $x = ay^2$ (a est le paramètre de la famille).

S o l u t i o n. On appelle *trajectoires orthogonales* d'une famille de courbes donnée les courbes d'une autre famille telles que chacune d'elles coupe chacune des courbes de la première famille à angle droit.

Si $F(x, y, a) = 0$ est l'équation de la famille donnée, alors, pour la recherche des trajectoires orthogonales, il faut :

1) former l'équation différentielle de la famille de courbes donnée

$$f(x, y, y') = 0;$$

2) en appliquant la condition d'orthogonalité ($y'_{\mathrm{I}} \cdot y'_{\mathrm{II}} = -1$), remplacer dans cette équation différentielle y' par $-\frac{1}{y'}$;

3) intégrer l'équation obtenue

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)=0.$$

Pour résoudre le problème en question, différentions l'équation de la famille de paraboles donnée. On obtient : $1 = 2ayy'$. En éliminant le paramètre a de la famille entre les équations $x = ay^2$ et $1 = 2ayy'$, on trouve l'équation différentielle de la famille de paraboles donnée : $2xy' = y$. Remplaçons y' par $-\frac{1}{y'}$ et l'on obtient l'équation différentielle de la famille de trajectoires orthogonales :

$$2x + yy' = 0, \text{ ou } 2x\,dx + y\,dy = 0.$$

En intégrant l'équation obtenue, on trouve l'équation de la famille de trajectoires orthogonales :

$$x^2+\frac{1}{2}y^2=C, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{2C}=1.$$

Ainsi donc, les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles donnée sont des ellipses semblables dont le demi-grand axe (vertical) est $\sqrt{2}$ fois plus grand que le demi-petit axe.

Résoudre les équations:

446. $x \cdot \sin \frac{y}{x} \cdot y' + x = y \sin \frac{y}{x}$.

Réponse. $Cx = e^{\cos \frac{y}{x}}$.

447. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

Réponse. $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$.

448. $xy' \cdot \ln \frac{y}{x} = x + y \cdot \ln \frac{y}{x}$.

Réponse. $\ln x = \frac{y}{x}\left(\ln \frac{y}{x} - 1\right) + C$.

449. $xyy' = y^2 + 2x^2$.

Réponse. $y^2 = 4x^2 \ln Cx$.

450. $xy' - y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}$. Conditions initiales: $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $y = x \cdot \arcsin x$.

451. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$.

Réponse. $1 + \sin \frac{y}{x} = Cx \cdot \cos \frac{y}{x}$.

452. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$. Conditions initiales: $y(1) = 2$.

Réponse. $\operatorname{arctg} \frac{y}{2x} - 2 \ln |x| = \frac{\pi}{4}$.

453. $(x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$.

Réponse. $y^2 = x^2 \cdot \ln Cx^2$.

454. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Réponse. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2 + y^2}$.

455. $xy' = xe^{y/x} + y$. Conditions initiales: $y(1) = 0$.

Réponse. $y = -x \cdot \ln |1 - \ln x|$.

456. $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}$.

Réponse. $\frac{y}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln C \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

457. $(x^4+6x^2y^2+y^4)\,dx+4xy\,(x^2+y^2)\,dy=0$. Conditions initiales : $y(1)=0$.

Réponse. $x^5+10x^3y^2+5xy^4=1$.

458. $xy'=2\,(y-\sqrt{xy})$.

Réponse. $16xy=(y+4x-Cx^2)^2$.

459. $3y\sin\frac{3x}{y}\,dx+\left(y-3x\cdot\sin\frac{3x}{y}\right)dy=0$.

Réponse. $\ln|y|-\cos\frac{3x}{y}=C$.

460. Trouver une courbe telle que le produit de l'abscisse de n'importe quel de ses points par le segment déterminé sur l'axe Ox par la normale soit le double du carré de la distance de ce point à l'origine des coordonnées.

Réponse. $y=\pm x\sqrt{C^2x^2-1}$

461. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de circonférences $(x-1)^2+(y-1)^2=R^2$.

Réponse. $y-1=C\,(x-1)$.

4. Equations différentielles se ramenant aux équations homogènes. Les équations de la forme

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

se ramènent, pour $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, aux équations homogènes en faisant la substitution $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, où $(\alpha;\beta)$ est le point d'intersection des droites $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Si quand même $a_1b_2-a_2b_1=0$, alors la substitution $a_1x+b_1y=t$ permet de séparer les variables.

462. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$(2x+y+1)\,dx+(x+2y-1)\,dy=0.$$

Solution. L'équation appartient au premier type, car $y'=-\frac{2x+y+1}{x+2y-1}$ et $\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\neq 0$. On trouve le point d'intersection des droites $2x+y+1=0$ et $x+2y-1=0$: $x=\alpha=-1$; $y=\beta=1$.

Réalisons un changement de variables dans l'équation initiale en posant $x=u+\alpha=u-1$, $y=v+\beta=v+1$; $dx=du$, $dy=dv$. L'équation se ramène à la forme

$$(2u+v)\,du+(u+2v)\,dv=0.$$

Dans l'équation homogène obtenue on pose $v=ut$, d'où il vient $dv=u\,dt+t\,du$; on obtient ainsi l'équation à variables séparables

$$2\,(t^2+t+1)\,u\;du+u^2\,(1+2t)\,dt=0,$$

dont l'intégrale générale est $u\sqrt{t^2+t+1}=C$, ou (après la substitution $t=\frac{v}{u}$ et l'élévation au carré)

$$u^2+uv+v^2=C^2.$$

En revenant aux anciennes variables x et y ($u=x+1$, $v=y-1$), on trouve, après quelques transformations élémentaires, l'intégrale générale de l'équation initiale

$$x^2+y^2+xy+x-y=C_1.$$

(Dans ce cas, on a posé $C_1=C^2-1$.)

463. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$(x+y+2)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0.$$

S o l u t i o n. L'équation appartient au second type, car $\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0$. Aussi pose-t-on $y+x=t$, $dy=dt-dx$. L'équation donnée prendra alors la forme $(t+2)\,dx+(2t-1)\,(dt-dx)=0$, ou $(3-t)\,dx+(2t-1)\,dt=0$. En séparant les variables et en intégrant, on obtient

$$\int\frac{2t-1}{3-t}\,dt+\int dx=C,\quad\text{ou}\quad -2t-5\ln|t-3|+x=-C.$$

En revenant aux anciennes variables ($t=x+y$), on trouve la réponse définitive :

$$x+2y+5\ln|x+y-3|=C.$$

Résoudre les équations :

464. $2(x+y)\,dy+(3x+3y-1)\,dx=0$. Conditions initiales : $y(0)=2$.

Réponse. $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$.

465. $(x-2y+3)\,dy+(2x+y-1)\,dx=0$.

Réponse. $x^2+xy-y^2-x+3y=C$.

466. $(x-y+4)\,dy+(x+y-2)\,dx=0$.

Réponse. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

467. Trouver la courbe intégrale de l'équation $y'=\frac{x+y-2}{y-x-4}$, passant par le point $M(1;1)$.

Réponse. $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$.

5. Equations aux différentielles totales. L'équation différentielle

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0,$$

où $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, est appelée *équation aux différentielles totales*, c'est-à-dire que le premier membre de cette équation est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x,y)$. Si l'on transcrit cette équation sous la forme $du=0$, alors sa solution générale sera donnée par l'égalité $u=C$. La fonction $u(x,y)$ peut être

trouvée d'après la formule

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy.$$

Dans ces conditions, les bornes inférieures des intégrales x_0 et y_0 de cette dernière formule sont des valeurs arbitraires; leur choix est tributaire de l'unique condition qui consiste en ce que les intégrales du deuxième membre de cette formule doivent avoir un sens (c'est-à-dire qu'elles ne doivent pas être des intégrales divergentes impropres de seconde espèce). Si la condition $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ n'est pas satisfaite, alors, dans certains cas, on peut ramener l'équation examinée au type indiqué en la multipliant par un facteur dit *facteur intégrant* qui, dans le cas général, sera fonction de x et y: $\mu(x, y)$. Si l'équation donnée admet un facteur intégrant dépendant seulement de x, on calcule ce facteur d'après la formule

$$\mu=e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx},$$

où le rapport $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ ne doit être fonction que de x. D'une manière analogue, on calcule le facteur intégrant dépendant seulement de y d'après la formule

$$\mu=e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}dy},$$

où le rapport $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ ne doit être fonction que de y (l'absence dans ces rapports de y, dans le premier cas, et de x, dans le second, signifie que le facteur intégrant du type considéré existe).

468. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$(e^x + y + \sin y)\,dx + (e^y + x + x\cos y)\,dy = 0.$$

Solution. Ici, $P(x, y)=e^x+y+\sin y$, $Q(x, y)=e^y+x+$ $+x\cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$.

Par conséquent, le premier membre de l'équation est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y.$$

Intégrons $\frac{\partial u}{\partial x}$ par rapport à x:

$$u=\int (e^x+y+\sin y)\,dx+C(y)=e^x+xy+x\sin y+C(y).$$

Calculons la fonction arbitraire $C(y)$, en dérivant la dernière expression par rapport à y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x \cdot \cos y + C'(y).$$

On obtient l'équation

$$x + x \cos y + C'(y) = x + x \cos y + e^y,$$

d'où l'on tire

$$C'(y) = e^y, \; C(y) = e^y.$$

Ainsi donc, l'intégrale générale de l'équation est de la forme

$$e^x + xy + x \sin y + e^y = C.$$

469. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$(x + y - 1)\, dx + (e^y + x)\, dy = 0.$$

Solution. Ici, $P(x, y) = x + y - 1$, $Q(x, y) = e^y + x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Ainsi, la condition de la différentielle totale est vérifiée, c'est-à-dire que l'équation donnée est une équation aux différentielles totales.

Trouvons l'intégrale générale d'après la formule

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy = C.$$

En faisant $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, on aura:

$$\int_0^x (x + \quad dx + \int_0^y e^y\, dy = C_1,$$

ou

$$\left[\frac{1}{2} x^2 + xy - x\right]_0^x + e^y \Big|_0^y = C_1;$$

en substituant les limites, on trouve:

$$\frac{1}{2} x^2 + xy - x + e^y - 1 = C_1, \quad \text{ou} \quad e^y + \frac{1}{2} x^2 + xy - x = C,$$

où $C = C_1 + 1$.

470. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$(x \cos y - y \sin y)\, dy + (x \sin y + y \cos y)\, dx = 0.$$

Solution. On a

$$P(x, y) = x \sin y + y \cos y, \quad Q(x, y) = x \cos y - y \sin y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y,$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{x \cos y - y \sin y}{x \cos y - y \sin y} = 1.$$

Aussi, l'équation proposée admet-elle un facteur intégrant ne dépendant que de x. Trouvons ce facteur intégrant:

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

En multipliant l'équation initiale par e^x, on obtient l'équation

$$e^x (x \cos y - y \sin y)\, dy + e^x (x \sin y + y \cos y)\, dx = 0,$$

qui, comme on peut s'en convaincre aisément, sera une équation aux différentielles totales; en effet, dans l'équation nouvellement obtenue, on a

$$P_1(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y), \quad Q_1(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y).$$

D'où il vient

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [e^x (x \sin y + y \cos y)] = e^x (x \cos y + \cos y - y \sin y);$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [e^x (x \cos y - y \sin y)] = e^x [x \cos y - y \sin y + \cos y].$$

Ces dérivées sont égales et, par conséquent, le premier membre de la nouvelle équation obtenue est égal à $du(x, y)$.

Ainsi donc, on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x (x \sin y + y \cos y).$$

En intégrant la première de ces égalités par rapport à y, on obtient

$$u = \int e^x (x \cos y - y \sin y)\, dy + C(x) =$$

$$= xe^x \cdot \sin y + e^x y \cdot \cos y - e^x \cdot \sin y + C(x).$$

Trouvons la dérivée par rapport à x de la fonction obtenue :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \sin y + xe^x \cdot \sin y - e^x \cdot \sin y + e^x \cdot y \cdot \cos y + C'(x) =$$
$$= e^x (x \sin y + y \cos y) + C'(x).$$

En comparant la valeur trouvée de $\frac{\partial u}{\partial x}$ avec $P(x, y)$, on a

$$C'(x) = 0, \ C(x) = 0.$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation initiale est de la forme

$$u(x, y) = xe^x \cdot \sin y + e^x y \cdot \cos y - e^x \cdot \sin y = C,$$

ou

$$e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C.$$

Résoudre les équations :

471. $(x + \sin y)\, dx + (x \cos y + \sin y)\, dy = 0.$

Réponse. $\frac{1}{2} x^2 + x \sin y - \cos y = C.$

472. $(y + e^x \cdot \sin y)\, dx + (x + e^x \cdot \cos y)\, dy = 0.$
Réponse. $xy + e^x \cdot \sin y = C.$

473. $(xy + \sin y)\, dx + \left(\frac{1}{2} x^2 + x \cdot \cos y\right) dy = 0.$

Réponse. $\frac{1}{2} x^2 y + x \cdot \sin y = C.$

474. $(x^2 + y^2 + y)\, dx + (2xy + x + e^y)\, dy = 0.$ Conditions initiales : $y(0) = 0.$

Réponse. $\frac{1}{3} x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1.$

475. $(2xye^{x^2} + \ln y)\, dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right) dy = 0.$ Conditions initiales : $y(0) = 1.$

Réponse. $ye^{x^2} + x \ln y = 1.$

476. $[\sin y + (1 - y) \cos x]\, dx + [(1 + x) \cos y - \sin x]\, dy = 0.$
Réponse. $(1 + x) \sin y + (1 - y) \sin x = C.$

477. $(y + x \ln y)\, dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right) dy = 0.$

Réponse. $x^2 \ln y + 2y(x + 1) = C.$

478. $(x^2 + \sin y)\, dx + (1 + x \cos y)\, dy = 0.$
Réponse. $x^3 + 3y + 3x \sin y = C.$

479. $ye^x\, dx + (y + e^x)\, dy = 0.$

Réponse. $ye^x + \frac{1}{2} y^2 = C.$

480. $(e^x \sin y + x)\,dx + (e^x \cos y + y)\,dy = 0.$

Réponse. $x^2 + y^2 + 2e^x \sin y = C.$

481. $(\ln y - 5y^2 \sin 5x)\,dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \cos 5x\right) dy = 0.$ Conditions initiales : $y(0) = e.$

Réponse. $x \ln y + y^2 \cos 5x = e^2.$

482. $(\arcsin x + 2xy)\,dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)\,dy = 0.$

Réponse. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + x^2 y + y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) + y = C.$

483. $(3x^2 y + \sin x)\,dx + (x^3 - \cos y)\,dy = 0.$

Réponse. $x^3 y - \cos x - \sin y = C.$

484. $(e^{x+y} + 3x^2)\,dx + (e^{x+y} + 4y^3)\,dy = 0.$ Conditions initiales : $y(0) = 0.$

Réponse. $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1.$

485. $(\operatorname{tg} y - y \operatorname{cosec}^2 x)\,dx + (\operatorname{ctg} x + x \sec^2 y)\,dy = 0.$

Réponse. $x \operatorname{tg} y + y \operatorname{ctg} x = C.$

486. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y\right) dx + \left(e^y - x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0.$

Réponse. $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - xy + e^y = C.$

Intégrer les équations ci-dessous admettant un facteur intégrant ne dépendant que de x ou de y.

487. $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0 \; (\mu = \varphi(x)).$

Réponse. $y = Cx - \ln x - 1 \left(\mu = \frac{1}{x^2}\right).$

488. $(x^2 \cos x - y)\,dx + x\,dy = 0 \; (\mu = \varphi(x)).$

Réponse $y = x(C - \sin x) \left(\mu = \frac{1}{x^2}\right).$

489. $y\,dx - (x + y^2)\,dy = 0 \; (\mu = \varphi(y)).$

Réponse. $x = y(C + y) \left(\mu = \frac{1}{y^2}\right).$

490. $y\sqrt{1 - y^2}\,dx + \left(x\sqrt{1 - y^2} + y\right) dy = 0 \; (\mu = \varphi(y)).$

Réponse. $xy - \sqrt{1 - y^2} = C \left(\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\right).$

491. Montrer que l'équation

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

qui est à la fois une équation homogène et une équation aux différentielles totales, admet l'intégrale générale

$$P \cdot x + Q \cdot y = C.$$

I n d i c a t i o n. Appliquer le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes d'après lequel

$$x \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = t \cdot P(x, y),$$

où t est l'indice d'homogénéité des fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$.

6. Equations différentielles linéaires du premier ordre. Equations de Bernoulli. Une équation de la forme

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

est dite *linéaire* (y et y' sont au premier degré sans être multipliées l'une par l'autre). Si $Q(x) \not\equiv 0$, l'équation est appelée équation linéaire *non homogène*; lorsque $Q(x) \equiv 0$, on dit que c'est une équation linéaire *homogène*.

La solution générale d'une équation homogène est aisément obtenue au moyen de la séparation des variables; en séparant les variables dans l'équation $y' + P(x)\, y = 0$, on trouve successivement:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\, dx\,; \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\, dx\,;$$

$$\ln y = -\int P(x)\, dx + \ln C,$$

ou, enfin,

$$y = Ce^{-\int P(x)\, dx},$$

où C est une constante arbitraire.

On peut trouver la solution générale d'une équation linéaire non homogène à partir de la solution générale de l'équation homogène correspondante en appliquant la *méthode de Lagrange* et en faisant varier la constante arbitraire, c'est-à-dire en posant $y = C(x)\, e^{-\int P(x)\, dx}$, où $C(x)$ est une certaine fonction de x différentiable qui reste à déterminer.

Pour trouver $C(x)$, on substitue y dans l'équation initiale, ce qui donne l'équation

$$C'(x)\, e^{-\int P(x)\, dx} = Q(x).$$

D'où il vient

$$C(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C,$$

où C est une constante arbitraire. La solution générale de l'équation non homogène sera alors de la forme

$$y = e^{-\int P(x)\, dx} \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C \right].$$

Les équations linéaires du premier ordre peuvent être également intégrées suivant la *méthode de Bernoulli* qui consiste en ce qui suit. En posant $y = uv$, où u et v sont deux fonctions inconnues, on met l'équation initiale sous la forme

$$u'v = uv' + P(x)\, uv = Q(x),$$

ou

$$u\,[v' + P(x)\, v] + vu' = Q(x).$$

En partant du fait que l'une des fonctions inconnues (par exemple v) peut être choisie d'une façon arbitraire (on sait que ce n'est que le produit uv qui doit vérifier l'équation initiale), on prend pour v n'importe quelle solution particulière de l'équation $v' + P(x)v = 0$ (par exemple $v = e^{-\int P(x)\,dx}$), solution qui rend donc égal à zéro le coefficient de u dans la dernière équation.

L'équation précédente se mettra alors sous la forme

$$vu' = Q(x), \quad \text{ou} \quad u' = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx},$$

d'où l'on tire u:

$$u = C + \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

En multipliant u par v, on trouve, pour la solution de l'équation initiale, l'expression précédente:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right].$$

Une équation (non linéaire) de la forme

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^m,$$

où $m \neq 0$, $m \neq 1$, est appelée *équation de Bernoulli*. Celle-ci peut être mise sous la forme d'une équation linéaire par remplacement de la fonction inconnue à l'aide de la substitution $z = y^{1-m}$. Par suite, l'équation initiale se ramène à la forme

$$\frac{1}{1-m}\,z' + P(x)\,z = Q(x).$$

En intégrant des équations de Bernoulli concrètes, il n'est pas nécessaire de les mettre au préalable sous forme d'équations linéaires, car il suffit d'appliquer directement soit la méthode de Bernoulli, soit celle de variation de la constante arbitraire.

492. Intégrer l'équation $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, les conditions initiales étant $y(0) = 0$.

Solution. Intégrons l'équation homogène correspondante $y' \cos^2 x + y = 0$, en séparant les variables:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0, \quad \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C, \quad y = Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Cherchons la solution de l'équation non homogène initiale sous la forme de $y = C(x)\,e^{-\operatorname{tg} x}$, où $C(x)$ est une fonction inconnue. En substituant dans l'équation initiale $y = C(x)\,e^{-\operatorname{tg} x}$ et $y' = C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)\,e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x$, on obtient l'équation

$$\cos^2 x C'(x)\,e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)\,e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x \cos^2 x + C(x)\,e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x,$$

ou

$$C'(x)\cos^2 x\,e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x,$$

d'où l'on tire

$$C(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\, dx = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + C.$$

Ainsi donc, on obtient la solution générale de l'équation donnée

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

En s'adressant aux conditions initiales $y(0) = 0$, on trouve la constante arbitraire C : $0 = -1 + C$, d'où $C = 1$.

Par conséquent, la solution particulière cherchée est

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}.$$

493. Intégrer l'équation $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$.

S o l u t i o n. C'est une équation linéaire. Résolvons-le par la méthode de Bernoulli. En posant $y = uv$, on obtient $u'v + v'u - uv \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$, ou $u(v' - v \operatorname{th} x) + u'v = \operatorname{ch}^2 x$. Posons $v' - v \operatorname{th} x = 0$, d'où $\frac{dv}{v} = \operatorname{th} x\, dx$; en intégrant, on trouve : $\ln v = \ln \operatorname{ch} x$, ou $v = \operatorname{ch} x$ (on n'introduit pas la constante d'intégration, car il nous suffit de trouver une solution particulière quelconque de cette équation auxiliaire).

Pour déterminer u, on a l'équation $u'v = \operatorname{ch}^2 x$ ou $u' \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 x$, d'où l'on trouve $u = \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

En multipliant u par v, on trouve la solution générale

$$y = \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + C).$$

494. Intégrer l'équation

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x.$$

S o l u t i o n. Intégrons l'équation homogène correspondante :

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\, dx}{1-x^2},$$

ou

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \ln C,$$

c'est-à-dire $y = C\sqrt{1-x^2}$. Posons maintenant $y = C(x)\sqrt{1-x^2}$:

$$y' = C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x \cdot C(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

et après substitution dans l'équation non homogène initiale, on trouve :

$$C'(x)\sqrt{1-x^2}-\frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{1-x^2}C(x)\sqrt{1-x^2}=\arcsin x+x$$

D'où l'on tire

$$C'(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

En intégrant, on trouve $C(x)$:

$$C(x)=\int\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Ainsi donc, la solution générale de l'équation donnée est de la forme

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\sqrt{1-x^2}+C\right]$$

495. Résoudre l'équation $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$.

Solution. C'est l'équation de Bernoulli. Intégrons-la par la méthode de variation de la constante arbitraire. Pour ce faire, intégrons d'abord l'équation linéaire homogène intéressée

$$y'+\frac{y}{x}=0,$$

dont la solution est $y=\frac{C}{x}$.

Cherchons la solution de l'équation de Bernoulli initiale, en posant

$$y=\frac{C(x)}{x},\quad y'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}.$$

La substitution de y et y' dans l'équation initiale donne :

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4,$$

ou

$$\frac{C'(x)}{x}=\frac{[C(x)]^4}{x^2}.$$

Intégrons l'équation obtenue

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4}=\frac{dx}{x},$$

d'où l'on tire

$$-\frac{1}{3[C(x)]^3}=\ln x-\ln C,$$

ou

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}}.$$

Ainsi donc, la solution générale de l'équation initiale est

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}}.$$

496. Intégrer l'équation

$$y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arc\,tg}x.$$

S o l u t i o n. C'est aussi l'équation de Bernoulli. Intégrons-la par la méthode de Bernoulli et pour ce faire, posons $y = uv$. En substituant $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ dans l'équation initiale, on fait grouper les termes contenant u au premier degré:

$$u'v+u\left(v'-\frac{2xv}{1+x^2}\right)=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arc\,tg}x.$$

Prenons v pour une solution particulière quelconque de l'équation

$$v'-\frac{2xv}{1+x^2}=0.$$

En séparant les variables dans cette dernière, on trouve

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x\,dx}{1+x^2},$$

d'où $\ln v = \ln(1 + x^2)$, ou $v = 1 + x^2$ (sans introduire la constante).

Pour trouver u, on a l'équation

$$u'v=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arc\,tg}x,$$

ou (du fait que $v = 1 + x^2$)

$$u'=\frac{4\sqrt{u}\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}.$$

Séparons les variables et intégrons

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{2\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}dx;\quad \sqrt{u}=\operatorname{arc\,tg}^2x+C.$$

Ainsi donc,

$$u=(\operatorname{arctg}^2x+C)^2$$

et

$$y = uv = (1 + x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$$

est la solution générale de l'équation initiale.

497. Intégrer l'équation $y = xy' + y' \ln y$.

Solution. On peut aisément intégrer cette équation en inversant les rôles de x et de y, c'est-à-dire en prenant y pour variable et x en qualité de fonction inconnue. Pour ce faire, il faut seulement (en appliquant la formule de dérivation d'une fonction inverse) poser $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

L'équation donnée se ramène à l'équation suivante

$$yx'_y = x + \ln y.$$

C'est une équation linéaire par rapport à x. Intégrons l'équation homogène correspondante $yx' = x$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \text{d'où} \quad x = Cy.$$

Cherchons la solution de l'équation non homogène initiale, en posant $x = C(y)\,y$, d'où $x'_y = C'(y)\,y + C(y)$. On obtient par substitution dans l'équation

$$C'(y)\,y^2 + C(y)\,y = C(y)\,y + \ln y,$$

d'où

$$C'(y) = \frac{\ln y}{y^2}, \quad C(y) = C - \frac{1 + \ln y}{y}.$$

En multipliant $C(y)$ par y, on trouve la solution de l'équation initiale

$$x = Cy - 1 - \ln y.$$

498. Intégrer l'équation

$$(x^2 \ln y - x)\,y' = y.$$

Solution. Cette équation se prête aisément à l'intégration à l'aide de la transformation précédente. En prenant y pour variable et x pour fonction inconnue, on ramène cette équation à la forme $x^2 \ln y - x = yx'$ ou $yx' + x = x^2 \ln y$. C'est une équation de Bernoulli par rapport à x.

En intégrant l'équation linéaire homogène correspondante

$$yx' + x = 0,$$

on trouve $x = \frac{C}{y}$.

Posons dans l'équation initiale $x = \frac{C(y)}{y}$, d'où $x' = \frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2}$; on obtient l'équation ci-dessous servant à calculer $C(y)$:

$$C'(y) - \frac{C(y)}{y} + \frac{C(y)}{y} = \frac{[C(y)]^2}{y} \ln y,$$

ou

$$C'(y) = \frac{[C(y)]^2 \ln y}{y^2}.$$

Séparons les variables et intégrons :

$$\frac{dC(y)}{[C(y)]^2} = \frac{\ln y}{y^2}\, dy,$$

d'où il vient

$$-\frac{1}{C(y)} = C - \frac{\ln y + 1}{y}; \quad C(y) = \frac{y}{\ln y + 1 - Cy}.$$

En multipliant $C(y)$ par $\frac{1}{y}$, on trouve la solution générale de l'équation initiale

$$x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Résoudre les équations :

499. $xy' - y = x^2 \cos x$.

Réponse. $y = x(\sin x + C)$.

500. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Réponse. $y = e^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 + C\right)$.

501. $y' \cos x + y = 1 - \sin x$.

Réponse. $y = \frac{(x + C)\cos x}{1 + \sin x}$.

502. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}$. Conditions initiales : $y(1) = 0$.

Réponse. $y = \frac{a(x-1)}{x^n}$.

503. $(1 + x^2) y' + y = \operatorname{arctg} x$.

Réponse. $y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}$.

504. $y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$. Conditions initiales : $y(0) = 0$.

Réponse. $y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$.

505. $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Réponse. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C\right)$.

506. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$. Conditions initiales : $y(e) = \frac{1}{2} e^2$.

Réponse. $y = \frac{1}{2} x^2 \ln x$.

507. $y' \sin x - y \cos x = 1$. Conditions initiales : $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Réponse. $y = -\cos x$.

508. $y'(x+y^2)=y$.
Indication. Prendre x pour fonction inconnue.
Réponse. $x=Cy+y^2$.

509. $y'+3y\operatorname{tg}3x=\sin 6x$. Conditions initiales: $y(0)=\frac{1}{3}$.
Réponse. $y=\cos 3x\left(1-\frac{2}{3}\cos 3x\right)$.

510. $(2xy+3)dy-y^2dx=0$.
Indication. Prendre x pour fonction inconnue.
Réponse. $x=Cy^2-\frac{1}{y}$.

511. $(y^4+2x)y'=y$.
Indication. Prendre x pour fonction inconnue.
Réponse. $x=Cy^2+\frac{y^4}{2}$.

512. $y'+\frac{2y}{x}=3x^2y^{4/3}$.
Réponse. $y^{-1/3}=Cx^{2/3}-\frac{3}{7}x^3$.

513. $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1}$.
Réponse. $y=\frac{x-1}{C-x}$.

514. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
Réponse. $y^{1/2}-\operatorname{tg}x=\frac{\ln\cos x+C}{x}$.

515. $4xy'+3y=-e^xx^4y^5$.
Réponse. $y^{-4}=x^3(e^x+C)$.

516. $y'+y=e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{y}$. Conditions initiales: $y(0)=\frac{9}{4}$.
Réponse. $y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x+1\right)^2$.

517. $y'+\frac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)\sin x$. Conditions initiales: $y(0)=1$.
Réponse. $y=\frac{\sec x}{x^3+1}$.

518. $y\,dx+(x+x^2y^2)\,dy=0$.
Indication. Prendre x pour fonction inconnue.
Réponse. $x=\frac{1}{y(y+C)}$.

519. $y'-2y\operatorname{tg}x+y^2\sin^2 x=0$.
Réponse. $y=\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x-x+C}$.

520. $(y^2 + 2y + x^2)\, y' + 2x = 0$. Conditions initiales: $y(1) = 0$.

Indication. Prendre x pour fonction inconnue.

Réponse. $x^2 + y^2 = e^{-y}$.

7. Equations de la forme $x = \varphi(y')$ et $y = \varphi(y')$. Ces équations se prêtent aisément à l'intégration sous forme paramétrique, si l'on pose $y' = p$ et que l'on prend p pour le paramètre par lequel il convient d'exprimer aussi bien x que y. En effet, en posant $y' = p$ dans l'équation $x = \varphi(y')$, on obtient immédiatement l'expression de x en fonction du paramètre p: $x = \varphi(p)$. D'où l'on trouve par différentiation $dx = \varphi'(p)\, dp$; du fait que $dy = y'\, dx = p\, dx$, on a $dy = p\varphi'(p)\, dp$ et y est trouvé par intégration: $y = \int p\varphi'(p)\, dp + C$.

Ainsi, présentée sous forme paramétrique, la solution de l'équation $x = \varphi(y')$ s'écrira:

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int p\varphi'(p)\, dp + C. \end{cases}$$

D'une manière analogue, en posant $y' = p$ dans l'équation $y = \varphi(y')$, on trouve $y = \varphi(p)$. En différentiant y, on obtient $dy = \varphi'(p)\, dp$, mais, comme auparavant, $dy = p\, dx$. Ainsi donc, $p\, dx = \varphi'(p)\, dp$, d'où il vient $dx = \frac{\varphi'(p)\, dp}{p}$ et x sera trouvé par intégration: $x = \int \frac{\varphi'(p)\, dp}{p} + C$. La solution générale de l'équation $y = \varphi(y')$ sera de la forme

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)\, dp}{p} + C, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

Dans les deux cas, on est autorisé à éliminer, si on y parvient, le paramètre p pour trouver l'intégrale générale de l'équation.

521. Intégrer l'équation $x = y' \sin y' + \cos y'$.

Solution. Posons $y' = p$. Alors $x = p \sin p + \cos p$. Différentions cette égalité:

$$dx = (\sin p + p \cos p - \sin p)\, dp = p \cos p\, dp$$

et substituons cette valeur de dx dans l'égalité $dy = p\, dx$:

$$dy = p^2 \cos p\, dp,$$

c'est-à-dire

$$y = \int p^2 \cos p\, dp = (p^2 - 2) \sin p - 2p \cos p + C.$$

Ainsi, on obtient la solution générale de l'équation sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x = p \sin p + \cos p, \\ y = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C. \end{cases}$$

522. Intégrer l'équation $y' = \operatorname{arctg} \frac{y}{y'^2}$.

S o l u t i o n. On trouve d'abord $y = y'^2 \cdot \operatorname{tg} y'$. Posons $y' = p$. Alors $y = p^2 \operatorname{tg} p$. Différentions cette égalité: $dy = (2p \operatorname{tg} p + p^2 \sec^2 p)\, dp$ et, par substitution de pdx à dy, on obtient $p\, dx = p\,(2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp$, d'où, en simplifiant par p et en intégrant, on trouve

$$x = \int (2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp = p \operatorname{tg} p - \ln \cos p + C.$$

La solution générale de l'équation proposée est de la forme

$$\begin{cases} y = p^2 \operatorname{tg} p, \\ x = p \operatorname{tg} p - \ln \cos p + C. \end{cases}$$

523. Intégrer l'équation $x = y' + \ln y'$.

S o l u t i o n. Posons $y' = p$. Ainsi donc, $x = p + \ln p$; par différentiation on trouve

$$dx = dp + \frac{dp}{p}.$$

Vu le fait que $dy = p\, dx$, alors

$$dy = p\left(dp + \frac{dp}{p}\right) = (p+1)\, dp.$$

En intégrant, on trouve y:

$$y = \frac{1}{2}(p+1)^2 + C.$$

La solution générale de l'équation proposée inscrite sous forme paramétrique se présente comme suit

$$\begin{cases} x = p + \ln p, \\ y = \frac{1}{2}(p+1)^2 + C. \end{cases}$$

Ici, le paramètre p est facilement éliminable; de la seconde égalité on obtient $p = \sqrt{2(y-C)} - 1$ ($p > 0$, d'où il vient que devant la racine on doit prendre le signe « plus »). En substituant l'expression de p obtenue dans la première égalité, on trouve la solution générale de l'équation sous la forme suivante:

$$x = \sqrt{2(y-C)} - 1 + \ln\left[\sqrt{2(y-C)} - 1\right].$$

Résoudre les équations:

524. $\arcsin \frac{x}{y'} = y'$.

Réponse. $x = p \sin p$, $y = (p^2 - 1) \sin p + p \cos p + C$.

525. $y = e^{y'}(y' - 1)$.

Réponse. $x = e^p + C$, $y = e^p (p - 1)$ ou, après élimination de p, $y = (x - C)[\ln(x - C) - 1]$.

526. $x = 2(\ln y' - y')$.

Réponse. $x = 2(\ln p - p)$, $y = 2p - p^2 + C$.

527. $y(1+y'^2)^{1/2} = y'$.

Réponse. $x = \ln \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C$, $y = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

528. $x = 2y' + 3y'^2$.

Réponse. $x = 2p + 3p^2$, $y = 2p^3 + p^2 + C$.

529. $x = y'(1 + e^{y'})$.

Réponse. $x = p(1+e^p)$, $y = \frac{1}{2}p^2 + (p^2 - p + 1)e^p + C$.

530. $x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1)$.

Réponse. $x = e^{2p}(2p^2 - 2p + 1)$, $y = e^{2p}(2p^3 - 3p^2 + 3p - 1{,}5) + C$.

531. $y = y' \ln y'$.

Réponse. $x = \frac{1}{2}\ln^2 p + \ln p + C$, $y = p \ln p$.

8. Equations de Lagrange et de Clairaut. On appelle *équation* de Lagrange une équation différentielle du premier ordre, linéaire par rapport à x et y, dont les coefficients sont des fonctions de y' :

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0.$$

L'équation de Lagrange s'intègre de la façon suivante. Résolvons-la par rapport à y et prenons y' pour paramètre, en posant $y' = p$:

$$y = xf(p) + \varphi(p).$$

(Ici, on introduit les notations $f(y') = -\frac{P(y')}{Q(y')}$, $\varphi(y') = -\frac{R(y')}{Q(y')}$.) En différentiant l'équation obtenue et en substituant $p\,dx$ à dy dans le premier membre, on trouve l'équation

$$p\,dx = f(p)\,dx + xf'(p)\,dp + \varphi'(p)\,dp.$$

Cette dernière équation est linéaire par rapport à x (en tant que fonction de p) et, de ce fait, se prête à l'intégration. Si sa solution est $x = F(p, C)$, alors la solution générale de l'équation de Lagrange sera de la forme:

$$\begin{cases} x = F(p, C), \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p, C)f(p) + \varphi(p). \end{cases}$$

On appelle *équation de Clairaut* une équation de la forme

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

qui est un cas particulier de l'équation de Lagrange. En l'intégrant par la méthode indiquée, on obtient aisément la solution générale $y = Cx + \varphi(C)$ qui définit une famille de droites dans un plan.

Toutefois, l'équation de Clairaut admet, outre la solution générale, une solution singulière définissable par les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p). \end{cases}$$

La solution singulière de l'équation de Clairaut (elle existe si $\varphi'(p) \neq \text{const}$) est l'enveloppe d'une famille de droites définies par la solution générale (en

d'autres termes, la *solution générale de l'équation de Clairaut est une famille de tangentes à la solution singulière*).

L'équation de Lagrange peut admettre elle aussi des solutions singulières qui, si elles existent, sont les tangentes communes à toutes les courbes intégrales définies par la solution générale.

532. Intégrer l'équation $y = xy' - e^{y'}$.

Solution. C'est une équation de Clairaut. Posons $y' = p$ et recopions l'équation sous la forme $y = px - e^p$. Différentions cette dernière : $dy = p\,dx + x\,dp - e^p\,dp$; mais $dy = p\,dx$, d'où vient que la dernière équation prend la forme $x\,dp - e^p\,dp = 0$, ou $(x - e^p)\,dp = 0$. Ainsi donc, ou bien $dp = 0$, ou $x = e^p$. Si l'on pose $dp = 0$, alors $p = C$; en substituant cette valeur de p dans l'égalité $y = px - e^p$, on trouve la solution générale de l'équation proposée :

$$y = Cx - e^C.$$

Si l'on pose $x = e^p$, alors $y = pe^p - e^p = (p - 1)\,e^p$, et l'on obtient la solution singulière de l'équation initiale :

$$\begin{cases} x = e^p, \\ y = (p - 1)\,e^p. \end{cases}$$

En éliminant le paramètre p (dans notre cas, $p = \ln x$), on trouve la solution singulière sous forme explicite :

$$y = x\,(\ln x - 1).$$

Vérifions que l'ensemble de droites définies par la solution générale est une famille de tangentes à la courbe intégrale singulière.

En différentiant la solution singulière, on trouve $y' = \ln x$. L'équation de la tangente à la courbe intégrale singulière au point $M\,(x_0\,;\,y_0)$ [où $y_0 = x_0\,(\ln x_0 - 1)$] s'écrira sous la forme

$$y - y_0 = y_0'\,(x - x_0) \quad \text{ou} \quad y - x_0\,(\ln x_0 - 1) = \ln x_0\,(x - x_0),$$

ce qui donne, après simplification, $y = x \ln x_0 - x_0$. Lorsqu'on pose ici $\ln x_0 = C$, alors l'équation de la famille de tangentes à la courbe intégrale singulière prendra la forme $y = Cx - e^C$, c'est ce qu'on demandait de démontrer.

533. Intégrer l'équation $y = xy'^2 + y'^2$.

Solution. C'est une équation de Lagrange. On procédera comme précédemment, c'est-à-dire en posant $y' = p$, ce qui donne $y = xp^2 + p^2$. Différentions la dernière égalité : $dy = p^2\,dx + 2px\,dp + 2p\,dp$. Après substitution $dy = p\,dy$, on obtient l'équation $p\,dx = p^2\,dx + 2px\,dp + 2p\,dp$. D'où, en simplifiant par p, on obtient une équation à variables séparables $(1 - p)\,dx =$

$= 2(x+1)\,dp$, ou $\frac{dx}{x+1} = \frac{2\,dp}{1-p}$. Par intégration, on trouve:

$$\ln(x+1) = -2\ln|1-p| + \ln C; \quad x+1 = \frac{C}{(p-1)^2}.$$

En utilisant l'équation proposée $y = p^2(x+1)$, on trouve y:

$$y = \frac{Cp^2}{(1-p^2)}.$$

La simplification par p que nous avons effectuée peut entraîner (ce qui s'est produit dans notre cas) la perte de solution singulière; en posant $p = 0$, on trouve d'après l'équation $y = 0$: c'est une solution singulière de l'équation donnée.

Ainsi donc,

$$\begin{cases} x+1 = \dfrac{C}{(p-1)^2} \\ y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2} \end{cases} \text{— solution générale;}$$

$$y = 0 \qquad \text{— solution singulière.}$$

On peut éliminer le paramètre p de la solution générale et mettre celle-ci sous la forme $(\sqrt{y} + \sqrt{x+1})^2 = C$.

Résoudre les équations:

534. $y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2y'^2}$.

Réponse. Solution générale: $y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2C^2}$.

Solution singulière: $\begin{cases} x = -\dfrac{a^2p}{\sqrt{b^2+a^2p^2}}, \\ y = \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2p^2}}, \end{cases}$ ou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

535. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

Réponse. Solution générale: $y = Cx - \frac{1}{C}$.

Solution singulière: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{p^2}, \\ y = -\dfrac{2}{p}, \end{cases}$ ou $y^2 = -4x$.

536. $y = xy' + y' - y'^2$.

Réponse. Solution générale: $y = Cx + C(1-C)$:

Solution singulière: $\begin{cases} x = 2p - 1, \\ y = p^2, \end{cases}$ ou $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$.

537. $y = x\left(\frac{1}{x} + y'\right) + y'^2$.

Réponse. Solution générale: $y = Cx + C^2 + 1$.

Solution singulière: $\begin{cases} x = -2p, \\ y = 1 - p^2, \end{cases}$ ou $y = 1 - \frac{x^2}{4}$.

538. $2y(y' + 1) = xy'^2$.

Réponse. Solution générale: $\begin{cases} x = C(p+1), \\ y = \frac{C}{2}p^2, \end{cases}$ ou $y = \frac{(x-C)^2}{2C}$

Solutions singulières: $y = 0$, $y = -2x$.

§ 2. Equations différentielles d'ordres supérieurs

1. Notions générales. On appelle *équation différentielle du n-ième ordre* une équation de la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

La solution d'une telle équation est fournie par toute fonction $y = \varphi(x)$ n fois différentiable qui fait de l'équation donnée une identité, c'est-à-dire

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0.$$

Le *problème de Cauchy* pour une telle équation consiste dans la recherche d'une solution de cette équation qui vérifie les conditions: pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, où $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ sont des nombres donnés appelés *données initiales*, ou *conditions initiales*.

La fonction $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ sera appelée *solution générale* d'une équation différentielle du n-ième ordre donnée, si, pour un choix approprié des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$, cette fonction devient la solution de n'importe quel problème de Cauchy posé pour l'équation donnée.

Toute solution se déduisant de la solution générale, en concrétisant les valeurs des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (et notamment, toute solution du problème de Cauchy), est dite *solution particulière* de cette équation. Pour séparer de l'ensemble de solutions d'une équation différentielle une solution particulière déterminée, on fait parfois appel aux ainsi appelées *conditions aux limites*. Ces conditions, dont le nombre ne doit pas être supérieur à l'ordre de l'équation, ne sont pas données en un certain point, mais aux extrémités d'un certain intervalle. Il est évident que les conditions aux limites ne sont posées que pour des équations d'ordre supérieur à un.

On ne parvient à intégrer (sous forme finie) les équations différentielles du n-ième ordre que dans de certains cas particuliers.

2. Equations de la forme $y^{(n)} = f(x)$. La solution d'une pareille équation est obtenue en intégrant n fois, à savoir:

$$y^{(n)} = f(x), \quad y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]\,dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

. . . . . .

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

où

$$f_n(x) = \underbrace{\int\int\int\ldots\int}_{n \text{ fois}} f(x)\,dx^n.$$

Vu que $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$ ... sont des valeurs constantes, la solution générale peut aussi être mise sous la forme suivante:

$$y = f_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

539. Trouver la solution particulière de l'équation $y'' = xe^{-x}$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Solution. Trouvons la solution générale en intégrant successivement l'équation donnée:

$$y' = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int [-xe^{-x} - e^{-x} + C_1]\,dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2,$$

ou

$$y = (x+2)\,e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Utilisons les conditions initiales:

$$1 = 2 + C_2; \quad C_2 = -1;$$
$$0 = -1 + C_2; \quad C_1 = 1.$$

Par conséquent, la solution cherchée est

$$y = (x+2)\,e^{-x} + x - 1.$$

On peut trouver la même solution en utilisant immédiatement les conditions initiales proposées:

$$y' = y'(0) + \int_0^x xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1;$$

$$y = y(0) + \int_0^x [-xe^{-x} - e^{-x} + 1]\,dx =$$

$$= 1 + [(x+2)\,e^{-x} + x]_0^x = (x+2)\,e^{-x} + x - 1.$$

Résoudre les équations:

540. $y^{\mathrm{IV}} = \cos^2 x$. Conditions initiales: $y(0) = \frac{1}{32}$; $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$.

Réponse. $y = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{32}\cos 2x$.

541. $y''' = x \sin x$. Conditions initiales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

Réponse. $y = x \cos x - 3 \sin x + x^2 + 2x$.

542. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$.

Réponse. $y = \ln \sin x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

543. $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$.

Réponse. $y = \frac{1}{3} \sin^3 x + C_1 x + C_2$.

544. $y''' = xe^{-x}$. Conditions initiales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

Réponse. $y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3}{2} x^2 + 3$.

3. Equations différentielles ne contenant pas la fonction cherchée, c'est-à-dire équations de la forme

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

On peut abaisser l'ordre d'une telle équation en prenant comme nouvelle fonction inconnue la dérivée inférieure de l'équation donnée, c'est-à-dire en posant $y^{(k)} = z$. On obtient alors l'équation

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Ainsi donc, l'ordre de l'équation baisse de k unités.

545. Trouver la solution générale de l'équation $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Solution. Posons $y' = z$. L'équation prendra la forme $xz' = z \ln \frac{z}{x}$, ou $z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x}$; ainsi, on a obtenu une équation homogène du premier ordre. En posant $\frac{z}{x} = t$, d'où $z = tx$, $z' = t'x + t$, on obtient l'équation $t'x + t = t \ln t$, ou $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$. En intégrant, on trouve $\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$, ou $\ln t - 1 = C_1 x$, d'où $t = e^{1+C_1 x}$; en revenant à la variable y, on obtient l'équation $y' = xe^{1+C_1 x}$. D'où il vient

$$y = \int xe^{1+C_1 x}\, dx = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2.$$

546. Un corps de masse m tombe verticalement d'une certaine altitude, sa vitesse initiale étant nulle. Pendant la chute, le corps rencontre la résistance de l'air qui est proportionnelle au carré de la vitesse de chute. Trouver la loi du mouvement du corps.

Solution. Introduisons les notations: s est l'espace parcouru; $v = \frac{ds}{dt}$ est la vitesse de chute du corps; $w = \frac{d^2 s}{dt^2}$ est l'accélération. Le corps subit l action des forces suivantes: $P = mg$ (agissant dans le sens du mouvement) qui représente son propre

poids ; $F = kv^2 = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ (agissant dans le sens contraire du mouvement) qui est la résistance opposée par l'air.

En vertu de la seconde loi de Newton, on obtient l'équation différentielle du mouvement du corps suivante :

$$mw = P - kv^2,$$

ou

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Utilisons les conditions initiales : si $t=0$, alors $s=0$, $v=\frac{ds}{dt}=0$. En substituant v à $\frac{ds}{dt}$, recopions l'équation sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2,$$

d'où, en posant $\frac{mg}{k}=a^2$, on a $\frac{dv}{a^2-v^2}=\frac{k}{m}dt$. En intégrant, on trouve ($v \leqslant a$) :

$$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{k}{m}t + C_1.$$

Si $t=0$, alors $v=0$, d'où $C_1=0$. Donc,

$$\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{2ak}{m}t.$$

D'où

$$v = a\frac{e^{\frac{2ak}{m}t}-1}{e^{\frac{2ak}{m}t}+1} = a\frac{e^{\frac{ak}{m}t}-e^{-\frac{ak}{m}t}}{e^{\frac{ak}{m}t}+e^{-\frac{ak}{m}t}} = a\,\mathrm{th}\frac{ak}{m}t.$$

Mais $\frac{ak}{m} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{k}{m} = \sqrt{\frac{kg}{m}}$; en substituant $\frac{ds}{dt}$ à v, on arrive, pour la détermination de s, à l'équation

$$\frac{ds}{dt} = a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t,$$

d'où, en intégrant, on trouve s :

$$s = \sqrt{\frac{m}{kg}}\,a\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t + C_2 = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t + C_2.$$

Vu que $s=0$ pour $t=0$, on trouve $C_2=0$.

Donc, la loi de la chute du corps, lorsque la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse, est décrite par la formule

$$s = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t,$$

la vitesse du mouvement étant donnée par la formule $v = a \operatorname{th} \sqrt{\frac{kg}{m}}\, t$. Ici, $a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$; il est bon de remarquer que la vitesse de chute ne croît pas indéfiniment, car $\lim\limits_{t\to\infty} v = a\sqrt{\frac{P}{k}}$ (du fait que $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t = 1$), où P est le poids du corps. On notera que la vitesse de chute atteint sa valeur limite très rapidement, ne différant de celle-ci que d'une valeur insignifiante. C'est ce qu'on observe dans la pratique des sauts en parachute à ouverture retardée à partir d'une grande altitude.

Résoudre les équations :

547. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$. Conditions initiales : $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

Réponse. $y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)$.

548. $(1 - x^2)\, y'' - xy' = 2$.

Réponse. $y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$.

549. $2xy''' \cdot y'' = y''^2 - a^2$.

Réponse. $y = \pm \frac{4}{15C_1^2}(C_1x + a^2)^{5/2} + C_2x + C_3$.

550. $(1 + x^2)\, y'' + 1 + y'^2 = 0$.

Réponse. $y = \left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) \ln(1 + C_1x) - \frac{1}{C_1}x + C_2$.

551. $y'''(x-1) - y'' = 0$. Conditions initiales : $y(2) = 2$; $y'(2) = 1$, $y''(2) = 1$.

Réponse. $y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 6x + 4)$.

4. Equations différentielles ne contenant pas de variable indépendante, c'est-à-dire équations de la forme

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Une telle équation admet l'abaissement de son ordre si l'on pose $y' = z$ et que l'on prend y lui-même pour nouvelle variable. Dans ce cas, y'', y''', ... seront exprimés d'après les formules (que l'on déduit de la règle de dérivation d'une fonction de fonction) $y'' = z\frac{dz}{dy}$, $y''' = z\left[z\frac{d^2z}{d^2y} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]$, ... en fonction de z et des dérivées de z par rapport à y, l'ordre de l'équation devenant, de cette façon, inférieur d'une unité.

552. Résoudre l'équation $1 + y'^2 = yy''$.

Solution. Posons $y' = z$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$. L'équation prendra la forme $1 + z^2 = yz\frac{dz}{dy}$; c'est une équation du premier ordre par rap-

port à z à variables séparables. Séparons les variables et intégrons :

$$\frac{z\,dz}{1+z^2}=\frac{dy}{y}$$

ou

$$\ln(1+z^2)=2\ln y+2\ln C_1,\quad 1+z^2=C_1^2y^2,$$
$$z=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1},$$

d'où, en revenant à la variable y, on a

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}\,,\quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx,$$
$$\frac{1}{C_1}\ln\left(C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right)=\pm(x+C_2),$$

ou

$$y=\frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1}+e^{\mp(x+C_2)C_1}\right)=$$
$$=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}C_1(x+C_2)=C_1^*\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1^*}.$$

553. Trouver une courbe dont le rayon de courbure est égal au cube de la normale ; la courbe cherchée doit passer par le point M (0 ; 1) et admettre en ce point une tangente formant avec l'axe Ox un angle de 45°.

Solution. Etant donné que le rayon de courbure d'une courbe plane s'exprime par la formule $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ et que la longueur de la normale $N=y\sqrt{1+y'^2}$, alors l'équation différentielle du problème prend la forme

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\left(y\sqrt{1+y'^2}\right)^3.$$

D'où, après simplification par $(1+y'^2)^{3/2}$, on obtient l'équation $y''\cdot y^3=1$.

En posant $y'=z$, $y''=z\cdot\frac{dz}{dy}$, on aura pour z l'équation $z\cdot\frac{dz}{dy}\times$ $\times y^3=1$. En l'intégrant, on trouve : $z\,dz=y^{-3}\cdot dy$, ou $\frac{1}{2}z^2=$ $=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1$, c'est-à-dire $z^2=C_1-y^{-2}$; on revient à l'ancienne variable y et l'on obtient équation $y'^2=C_1-y^{-2}$.

On trouve la constante arbitraire C_1 à partir de la condition d'après laquelle la tangente au point M (0 ; 1) forme avec l'axe Ox un angle de 45°, c'est-à-dire tg 45° $=y'_M=1$, ou $y'(0)=1$.

Par conséquent, $1=C_1-1$, c'est-à-dire $C_1=2$.

Donc, on a obtenu pour déterminer y l'équation du premier ordre $y'^2 = 2 - y^{-2}$, d'où $y' = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$; séparons les variables et intégrons :

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{2y^2-1}} = dx; \quad \frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1} = x + \frac{1}{2}C_2,$$

ou

$$y^2 = \frac{1}{2}[(2x + C_2)^2 + 1].$$

On trouve la constante arbitraire C_2 à partir de la condition d'après laquelle la courbe passe par le point M (0 ; 1), c'est-à-dire

$$1 = \frac{1}{2}[(2\cdot 0 + C_2)^2 + 1]; \quad C_2 = 1.$$

Par conséquent, la courbe cherchée est définie par l'équation

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

Résoudre les équations :

554. $y''(2y+3) - 2y'^2 = 0$.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln(2y+3) = C_1x + C_2$.

555. $yy'' - y'^2 = 0$. Conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Réponse. $y = e^{2x}$.

556. $a^2y''^2 = 1 + y'^2$.

Réponse. $\pm(x + C_2) = a\ln\left[\frac{y + C_1 + \sqrt{(y+C_1)^2 - a^2}}{a}\right]$, ou $y + C_1 = \pm a\,\mathrm{ch}\,\frac{x + C_2}{a}$.

557. $yy'' - y'^2 = y^2\cdot\ln y$.

Réponse. $\ln y = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

558. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.

Réponse. $y = e^{\frac{x+C_2}{x+C_1}}$.

559. $y''(1+y) = y'^2 + y'$.

Réponse. $\ln[C_1(y+1) - 1] = C_1(x + C_2)$.

560. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$.

Réponse. $x = \sqrt{y} - \frac{C_1}{2}\ln(2\sqrt{y} + C_1) + C_2$.

5. Equations de la forme $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, homogènes par rapport à $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Une équation de la forme indiquée admet l'abaissement d'une unité de son ordre par la substitution $\frac{y'}{y} = z$, où z est une nouvelle fonction inconnue.

561. Résoudre l'équation $3y'^2 = 4yy'' + y^2$.

Solution. Divisons les deux membres de l'équation par y^2:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - 4\cdot\frac{y''}{y} = 1.$$

Faisons la substitution $\frac{y'}{y} = z$, d'où

$$\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = z',$$

ou

$$\frac{y''}{y} = z' + z^2.$$

On obtient l'équation

$$3z^2 - 4z^2 - 4z' = 1, \quad \text{ou} \quad -4z' = 1 + z^2;$$

d'une autre manière,

$$\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4}\,dx.$$

D'où, en intégrant, on trouve

$$\operatorname{arctg} z = C_1 - \frac{1}{4}x, \quad \text{ou} \quad z = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

En revenant à la variable y, on obtient

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

En intégrant la dernière équation, on trouve

$$\ln y = 4\ln\cos\left(C_1 - \frac{x}{4}\right) + \ln C_2,$$

ou

$$y = C_2\cdot\cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

562. Résoudre l'équation $y'^2 + yy'' = yy'$.

Solution. Bien que cette équation appartienne au type précédent, on peut l'intégrer d'une manière plus simple. Dans cette équation le premier membre est $(yy')'$, et, pour cette raison, l'équation prend la forme $(yy')' = yy'$, ou $\frac{d(yy')}{yy'} = dx$. D'où $\ln(yy') = x + \ln C_1$, ou $yy' = C_1e^x$; d'une autre manière $y\,dy = C_1e^x\cdot dx$. En intégrant, on trouve la solution finale:

$$\frac{1}{2}y^2 = C_1e^x + C_2.$$

Résoudre les équations:

563. $yy'' - y'^2 = 0$.

Réponse. $y = C_2e^{C_1x}$.

564. $(y+y')\,y''+y'^2=0$.

Réponse. $y\sqrt{y^2+C_1^2}+C_1^2\cdot\ln\left(y+\sqrt{y^2+C_1^2}\right) = \pm\left(-y^2+\right.$ $\left.+2C_1^2x+3C_2\right)$.

565. $2xy'''\cdot y''=y''^2-a^2$.

Réponse. $y=C_2x+C_3\pm\frac{4}{15C_1^2}(C_1x+a^2)^{5/2}$.

566. $y''=y'\cdot e^{y'}$. Conditions initiales: $(y(0)=0,\ y'(0)=1$.
Réponse. $y=-\ln|1-x|$.

567. Trouver une courbe dont la projection du rayon de courbure sur l'axe Oy est constante et égale à a, alors que l'axe Ox est tangent à la courbe cherchée à l'origine des coordonnées.

Réponse. $y=-a\cdot\ln\cos\frac{x}{a}$,

568. Trouver une courbe dont le rayon de courbure en tout point est égal à $\sec\alpha$, où α est l'angle formé par l'axe Ox et la tangente au point correspondant. La courbe cherchée passe par le point M (0; 1) et sa tangente en ce point est parallèle à l'axe Ox.
Réponse. $y=1+\ln\sec x$.

569. Un corps placé à un moment initial dans un liquide continue à s'immerger sous l'action de son propre poids, sans vitesse initiale. La résistance opposée par le liquide est directement proportionnelle à la vitesse d'immersion du corps. Trouver la loi du mouvement du corps si sa masse est m.

Réponse. $s=\frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{mg}{k}\cdot t$.

§ 3. Equations linéaires d'ordres supérieurs

1. Notions générales. On appelle *équation différentielle du n-ième ordre* une équation de la forme

$$y^{(n)}=a_1(x)\,y^{(n-1)}+a_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=f(x). \qquad (*)$$

Ici, les fonctions $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ et $f(x)$ sont données et continues sur un certain intervalle (a, b).

L'équation (*) est dite linéaire *non homogène*, ou *à second membre*. Si toutefois $f(x)\equiv 0$, l'équation est dite *linéaire homogène*. Une équation homogène dont le premier membre est le même que celui d'une équation non homogène est dite *correspondante à celle-ci*.

Si l'on connaît une solution particulière y_1 d'une équation linéaire homogène, on peut, à l'aide d'une substitution linéaire de la fonction cherchée $y=y_1\cdot\int z\,dx$ abaisser d'une unité son ordre et, par conséquent, l'ordre de l'équation non homogène correspondante. L'équation obtenue du $(n-1)$-ième ordre par rapport à z sera également une équation linéaire.

570. On donne l'équation $y''' + \frac{2}{x} y'' - y' + \frac{1}{x \ln x} y = x$ et l'on connaît la solution particulière $y_1 = \ln x$ de l'équation homogène correspondante. Abaisser l'ordre de l'équation.

Solution. Adressons-nous à la substitution $y = \ln x \cdot \int z\,dx$, où z est une nouvelle fonction inconnue. Alors, en substituant les dérivées correspondantes

$$y' = \frac{1}{x} \int z\,dx + z \ln x, \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \int z\,dx + \frac{2z}{x} + z' \ln x,$$

$$y''' = \frac{2}{x^3} \int z\,dx - \frac{3z}{x^2} + \frac{3z'}{x} + z'' \cdot \ln x$$

dans l'équation donnée, on obtient une équation du second ordre

$$z'' \cdot \ln x + \frac{2 \ln x + 3}{3} \cdot z' + \left(\frac{1}{x^2} - \ln x\right) z = x.$$

Nota. On remarquera qu'en appliquant la substitution ci-dessus à une équation linéaire du second ordre et en tenant compte du fait qu'une équation linéaire du premier ordre s'intègre par quadratures, on peut intégrer par quadratures toute équation linéaire du second ordre si l'on connaît une solution particulière de l'équation homogène correspondante.

571. Intégrer l'équation $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ ayant pour solution particulière $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

Solution. Faisons la substitution $y = \frac{\sin x}{x} \cdot \int z\,dx$. Alors

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \cdot \int z\,dx + \frac{\sin x}{x} z,$$

$$y'' = \frac{\sin x}{x} z' + \frac{2(x \cos x - \sin x)}{x^2} \cdot z - \frac{(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x}{x^3} \cdot \int z\,dx.$$

On obtient l'équation

$$\sin x \cdot z' + 2 \cos x \cdot z = 0,$$

d'où

$$z = \frac{C_1}{\sin^2 x}.$$

Par conséquent,

$$y = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{C_1\,dx}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{x} (C_2 - C_1 \operatorname{ctg} x) =$$

$$= C_2 \cdot \frac{\sin x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x}.$$

572. Abaisser l'ordre et intégrer l'équation $y'' \sin^2 x = 2y$ ayant pour solution particulière $y = \operatorname{ctg} x$.

Réponse. $y = C_2 + (C_1 - C_2 x) \operatorname{ctg} x$.

573. L'équation $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ a pour solution particulière $y = x$. Abaisser l'ordre et intégrer cette équation.

Réponse. $y = \frac{1}{2} x \ln^2 x + C_1 x \ln x + C_2 x$.

574. L'équation $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)\, y' + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0$ a pour solution particulière $y = \sin x$. Abaisser l'ordre de cette équation et l'intégrer.

Réponse. $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$.

2. Equations linéaires homogènes. L'une des propriétés remarquables des équations linéaires consiste en ce que leur solution générale peut être trouvée à partir du nombre connu de leurs solutions particulières. Citons le théorème sur la structure de la solution générale d'une équation linéaire homogène.

Théorème. *Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0,$$

alors $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ est la solution générale de cette équation ($C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires).

N o t a. Les fonctions $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sont dites *linéairement indépendantes sur l'intervalle* (a, b), si elles ne sont liées par aucune identité

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes quelconques qui ne s'annulent pas simultanément. S'il s'agit de deux fonctions, on peut formuler cette condition comme suit: deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes si leur rapport n'est pas constant: $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$. Par exemple: 1) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ sont linéairement indépendantes; 2) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ sont linéairement indépendantes; 3) $y_1 = 2e^{3x}$, $y_2 = 2e^{3x}$ sont linéairement dépendantes.

La condition suffisante d'indépendance linéaire de n fonctions continues avec leurs dérivées jusqu'au $(n-1)$-ième ordre sur l'intervalle (a, b) consiste en ce que le déterminant de Wronski (*wronskien*) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ de ces fonctions ne s'annule en aucun point de l'intervalle (a, b), c'est-à-dire

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si les n fonctions données sont les solutions particulières d'une équation différentielle linéaire homogène du n-ième ordre, alors cette condition (non-annulation) est non seulement suffisante mais également une condition nécessaire d'indépendance linéaire de ces n solutions.

Le wronskien de n solutions d'une équation linéaire homogène du n-ième ordre $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0$ est lié au premier coefficient de cette équation $a_1(x)$ par la *formule de Liouville-Ostrogradski*:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\big|_{x=x_0} \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\, dx}.$$

L'ensemble de n solutions d'une équation linéaire homogène du n-ième ordre, définies et linéairement indépendantes sur l'intervalle (a, b), est appelé *système fondamental* de solutions de cette équation.

Pour une équation différentielle linéaire homogène du second ordre

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0$$

le système fondamental se compose de ses deux solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$; sa solution générale se calcule d'après la formule

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Si, pour une telle équation, on connaît une solution particulière $y_1(x)$, alors sa seconde solution, linéairement indépendante de la première, peut être trouvée d'après la formule (qui est le corollaire de la formule de Liouville-Ostrogradski)

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx.$$

Cela rend possible l'intégration immédiate des équations linéaires homogènes du second ordre, pour lesquelles on connaît dès le début une solution particulière, sans avoir à abaisser leur ordre.

Ainsi, dans l'exercice 571, on connaît la solution $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ de l'équation $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$. En s'aidant de la formule ci-dessus, trouvons la seconde solution:

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} \int \frac{e^{-2\int \frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\, dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}.$$

Pour cette raison, la solution générale de l'équation donnée est de la forme

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

On recommande au lecteur de résoudre par cette méthode les exercices 572 à 574.

575. Montrer que $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ est une solution générale de l'équation $y'' - 9y = 0$.

S o l u t i o n. Par substitution dans l'équation donnée on se convainc aisément que les fonctions $y_1 = e^{3x}$ et $y_2 = e^{-3x}$ représentent ses solutions. Ces solutions particulières sont linéairement indépendantes, car $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{3x}}{e^{-3x}} = e^{6x} \neq \text{const}$, et, pour cette raison, elles constituent un système fondamental de solutions, d'où vient que $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ est une solution générale.

576. On donne l'équation $y''' - y' = 0$. Les fonctions e^x, e^{-x}, $\operatorname{ch} x$, constituent-elles le système fondamental de solutions, si elles représentent (il est d'ailleurs facile de le vérifier) les solutions de cette équation?

S o l u t i o n. Pour pouvoir vérifier l'indépendance linéaire de ces solutions, calculons le wronskien :

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x}\operatorname{ch} x \\ e^x & -e^{-x}\operatorname{sh} x \\ e^x & e^{-x}\operatorname{ch} x \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est nul, car les éléments de la première et de la troisième lignes sont identiques.

Par conséquent, les fonctions données sont linéairement dépendantes, et, pour cette raison, on ne saurait trouver la solution générale à partir de ces solutions particulières. On peut arriver au même résultat plus rapidement, car $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et, par conséquent, les trois fonctions données sont linéairement dépendantes.

577. L'équation $y'' - y = 0$ est vérifiée par deux solutions particulières $y_1 = \operatorname{sh} x$, $y_2 = \operatorname{ch} x$. Ces fonctions, constituent-elles le système fondamental de solutions de l'équation donnée?

Réponse. Oui.

578. Peut-on trouver la solution générale de l'équation $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0\ (x \neq 0)$ à partir de ses deux solutions particulières $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin x$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos x$?

Réponse. Oui.

579. Les fonctions $x + 1$, $2x + 1$, $x + 2$, sont-elles linéairement indépendantes?

Réponse. Non.

580. La même question pour $2x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x + 2$.

Réponse. Oui.

581. La même question pour $\sqrt{x}$, $\sqrt{x + a}$, $\sqrt{x + 2a}$.

Réponse. Oui.

582. La même question pour $\ln(2x)$, $\ln(3x)$, $\ln(4x)$.

Réponse. Non.

3. Equations linéaires homogènes à coefficients constants. Si dans une équation linéaire homogène

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0 \qquad (**)$$

tous les a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des nombres réels constants, alors sa solution particulière est de la forme $y = e^{kx}$. Les valeurs de k, pour lesquelles $y = e^{kx}$ sera la solution de l'équation (**), sont déduites de l'*équation* dite *caractéristique*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

C'est une équation de degré n admettant n racines (réelles ou complexes, parmi lesquelles peuvent figurer aussi des racines égales entre elles).

1) Si toutes les racines $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont réelles et distinctes, alors les solutions $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$ sont linéairement indépendantes et, par consé-

quent, la solution générale de l'équation différentielle initiale sera de la forme

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

2) Si k est la racine d'ordre de multiplicité m ($m \leqslant n$) de l'équation caractéristique, à cette racine il correspond alors m solutions particulières

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{kx}.$$

(Par exemple, si k est une racine triple, il correspond alors à cette racine les solutions particulières linéairement indépendantes e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}.)

3) Si parmi les racines d'une équation caractéristique il existe des racines complexes conjuguées $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, il correspond alors à ces racines deux solutions particulières réelles linéairement indépendantes $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \times \times \sin \beta x$. Si toutefois les racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ sont doubles, il correspond alors aux racines indiquées les solutions particulières $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$, $xe^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$, $xe^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$, etc. (On se rappelle que les racines complexes d'une équation à coefficients réels sont toujours deux à deux conjuguées, l'ordre de multiplicité des racines formant chaque couple étant le même.)

583. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - 7y' + 6y = 0.$$

Solution. L'équation caractéristique est de la forme $k^2 - - 7k + 6 = 0$ et a pour racines $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Par conséquent, ses solutions particulières linéairement indépendantes sont e^{6x} et e^x, d'où vient que la solution générale est de la forme $y = C_1 e^{6x} + + C_2 e^x$.

584. Trouver la solution générale de l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - 13y'' + 36y = 0.$$

Solution. L'équation caractéristique est de la forme $k^4 - - 13k^2 + 36 = 0$ et a pour racines $k_{1,2} = \pm 3$, $k_{3,4} = \pm 2$, auxquelles correspondent les solutions particulières linéairement indépendantes e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x} et e^{-2x}. Par conséquent, l'équation générale est : $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

585. Trouver la solution de l'équation $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$, vérifiant les conditions initiales : pour $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 3$.

Solution. L'équation caractéristique est de la forme $k^2 - - k - 2 = 0$; ses racines sont $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Par conséquent, la solution générale est $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$. En substituant les conditions initiales dans la solution générale et dans sa dérivée, on obtient le système d'équations par rapport à C_1 et C_2 :

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 3 = 2C_1 - C_2, \end{cases}$$

d'où $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Donc, la solution vérifiant les conditions initiales posées est $y = e^{2t} - e^{-t}$.

586. Trouver la solution de l'équation $\ddot{x} - 2\dot{x} = 0$ vérifiant les conditions aux limites : pour $t = 0$, $x = 0$; pour $t = \ln 2$, $x = 3$.

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^2 - 2k = 0$ admet les racines $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Par conséquent, la solution générale est de la forme $x = C_1 + C_2e^{2t}$. En substituant les conditions aux limites dans la solution générale trouvée, on obtient :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 \cdot e^{2\ln 2} = 3, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + 4C_2 = 3. \end{cases}$$

D'où $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

La solution particulière cherchée, vérifiant les conditions aux limites posées, est de la forme

$$x = e^{2t} - 1.$$

587. Trouver la solution générale de l'équation

$$y''' - 2y'' + y' = 0.$$

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^3 - 2k^2 + k = 0$ admet les racines $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 1$. Ici, nous avons une racine double égale à 1, d'où vient que les solutions particulières seront 1, e^x, xe^x. La solution générale est

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x.$$

588. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^2 - 4k + 13 = 0$ admet les racines $k = 2 \pm 3i$. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées et, pour cette raison, il leur correspond les solutions particulières $e^{2x} \cdot \cos 3x$ et $e^{2x} \cdot \sin 3x$. Par conséquent, la solution générale est

$$y = e^{2x} \cdot (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

589. Un point matériel de masse m se déplace suivant l'axe Ox sous l'action d'une force de rétablissement, dirigée vers l'origine des coordonnées et proportionnelle à la distance du point en mouvement à l'origine ; le milieu dans lequel le mouvement se produit oppose au déplacement du point une résistance proportionnelle à la vitesse du mouvement. Trouver la loi du mouvement.

S o l u t i o n. La vitesse du point est $\dot{x}$, son accélération est $\ddot{x}$; les forces agissant sur le point : la force de rétablissement est $f_1 = -ax$, la résistance du milieu est $f_2 = -b\dot{x}$.

En vertu de la seconde loi de Newton, on trouve

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - ax,$$

ou

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + ax = 0.$$

On a obtenu une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Son équation caractéristique $mk^2 + bk + a = 0$ admet les racines

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ma}}{2m}$$

1) Si $b^2 - 4ma > 0$, les racines sont alors réelles, distinctes et toutes les deux négatives; en introduisant pour elles les notations

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ma}}{2m} = -r_1, \quad k_2 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ma}}{2m} = -r_2,$$

on trouve la solution générale de l'équation du mouvement sous la forme

$$x = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}$$

(c'est le cas d'un mouvement dit *apériodique*).

2) Si $b^2 - 4ma = 0$, alors les racines de l'équation caractérisique sont réelles et égales entre elles:

$$k_1 = k_2 = -\frac{b}{2m} = -r.$$

Dans ce cas, la solution générale de l'équation régissant le mouvement est de la forme

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-rt}.$$

3) Enfin, si $b^2 - 4ma < 0$, alors l'équation caractéristique admet les racines complexes conjuguées:

$$k_1 = -\alpha + \beta i, \quad k_2 = -\alpha - \beta i,$$

où

$$\alpha = \frac{b}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4am - b^2}}{2m}.$$

La solution générale de l'équation régissant le mouvement est de la forme

$$x = e^{-\alpha t}\,(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),$$

ou

$$x = A e^{-\alpha t} \sin (\beta t + \varphi_0),$$

où

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{C_1}{A}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{C_2}{A}$$

(*oscillations amorties*).

Trouver les solutions générales des équations:

590. $y'' - y' - 2y = 0$.

Réponse. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

591. $y'' + 25y = 0$.

Réponse. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

592. $y'' - y' = 0$.
Réponse. $y = C_1 + C_2 e^x$.
593. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Réponse. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}$.
594. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$.
Réponse. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x$.
595. $y^{IV} + a^4 y = 0$.

Réponse. $y = (C_1 \cdot e^{\frac{a\sqrt{2}}{2}x} + C_3 e^{\frac{-a\sqrt{2}}{2}x}) \cos \frac{a\sqrt{2}}{2} x +$

$+ (C_2 e^{\frac{a\sqrt{2}}{2}x} + C_4 e^{\frac{-a\sqrt{2}}{2}x}) \sin \frac{a\sqrt{2}}{2} x$.

596. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.
Réponse. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

Trouver les solutions des équations vérifiant les conditions initiales ou les conditions aux limites données :

597. $y'' + 5y' + 6y = 0$. Conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$.
Réponse. $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$.
598. $y'' - 10y' + 25y = 0$. Conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Réponse. $y = xe^{5x}$.
599. $y'' - 2y' + 10y = 0$. Conditions initiales :

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}.$$

Réponse. $y = -\frac{1}{3} e^x \cdot \cos 3x$.

600. $9y'' + y = 0$. Conditions initiales : $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Réponse. $y = 2 \sin \frac{x}{3}$.

601. $y'' + 3y' = 0$. Conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Réponse. $y = \frac{1}{3}(5 - 2e^{-3x})$.

602. $y'' + 9y = 0$. Conditions aux limites : $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
Réponse. $y = \sqrt{2} \sin 3x$.
603. $y'' + y = 0$. Conditions aux limites : $y'(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.
Réponse. $y = \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x$.

604. Résoudre le problème 589 si la résistance opposée par le milieu est nulle.

Réponse. $x = C_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot \sin \beta t$, ou $x = A \cdot \sin (\varphi_0 + \beta t)$,

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{m}}.$$

4. Equations linéaires non homogènes. La structure de la solution d'une équation linéaire non homogène, c'est-à-dire d'une équation à second membre

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x)$$

est définie par le théorème ci-dessous.

Si $u = u(x)$ est une solution particulière d'une équation non homogène et que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ est le système fondamental de solutions de l'équation homogène correspondante, alors la solution générale de l'équation linéaire non homogène est de la forme $y = u + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$; autrement dit, la solution générale d'une équation non homogène est égale à la somme de n'importe laquelle de ses solutions particulières et de la solution générale de l'équation homogène correspondante.

Par conséquent, afin de construire la solution générale d'une équation non homogène, il faut trouver l'une de ses solutions particulières (en supposant déjà connue la solution générale de l'équation homogène correspondante).

Considérons deux méthodes applicables à la recherche de la solution particulière d'une équation linéaire non homogène.

Méthode de la variation des constantes arbitraires. Cette méthode s'avère utile pour la recherche de la solution particulière d'une équation linéaire non homogène du n-ième ordre à coefficients aussi bien variables que constants, à condition que l'on connaisse la solution générale de l'équation homogène correspondante.

La méthode de la variation consiste en ce qui suit. Soit connu le système fondamental de solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation homogène correspondante. La solution générale de l'équation non homogène est à rechercher sous la forme

$$u(x) = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n,$$

où les fonctions $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ sont déduites du système d'équations

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 + \ldots + C_n'(x)\, y_n = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' + \ldots + C_n'(x)\, y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

($f(x)$ est le second membre de l'équation donnée).

Pour une équation du second ordre $y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x)$, le système correspondant est de la forme

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

Ce système est résolu d'après les formules:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)}; \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)};$$

d'où vient qu'on peut immédiatement trouver $u(x)$ à l'aide de la formule

$$u(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x)\,dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)\,dx}{W(y_1, y_2)}.$$

(Ici, $W(y_1, y_2)$ est le wronskien des solutions y_1 et y_2.)

On demande, par exemple, d'intégrer l'équation

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{\operatorname{cotg} x}{x}.$$

Pour l'équation homogène correspondante, nous avons trouvé (voir page 173) les solutions particulières $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ et $y_2 = \frac{\cos x}{x}$; leur wronskien $W(y_1, y_2) = -\frac{1}{x^2}$.

Pour cette raison, on peut trouver $u(x)$ d'après la formule

$$u(x) = -\frac{\sin x}{x} \int \frac{\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{\operatorname{cotg} x}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} dx + \frac{\cos x}{x} \int \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\operatorname{cotg} x}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx - \frac{\cos x}{x} \cdot \int \cos x\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x \right] - \frac{\cos x}{x} \cdot \sin x.$$

Donc, $u(x) = \frac{\sin x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|}{x}$, alors que la solution générale de l'équation donnée est de la forme

$$y = C_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + C_2 \cdot \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

N o t a. Nous attirons encore une fois l'attention du lecteur sur le fait qu'une équation linéaire non homogène du second ordre peut être intégrée par quadratures, à condition qu'on connaisse u n e solution particulière $y_1(x)$ de l'équation homogène correspondante; la solution générale d'une telle équation est de la forme $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u(x)$, où y_2 est défini en fonction de y_1 d'après la formule

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx,$$

alors que $u(x)$ l'est en fonction de y_1 et y_2 d'après la formule indiquée ci-avant.

M é t h o d e d u c h o i x d'u n e s o l u t i o n p a r t i c u l i è r e (m é t h o d e d e s c o e f f i c i e n t s i n d é t e r m i n é s). Cette méthode n'est applicable qu'aux équations linéaires à coefficients constants et s e u l e m e n t dans le cas où le second membre de ces équations est de la forme

$$f(x) = e^{\alpha x} [p_n(x) \cos \beta x + q_m(x) \sin \beta x]$$

(ou représente une somme de fonctions de ce type). Ici, α et β sont des constantes, $p_n(x)$ et $q_m(x)$ sont des polynômes en x de degrés n et m respectivement.

La solution particulière d'une équation du n-ième ordre

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

(où $f(x)$ a la forme indiquée, alors que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constants réels) sera cherchée sous la forme

$$u(x) = x^r e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x].$$

Ici, r est égal à l'ordre de multiplicité de la racine $\alpha + \beta i$ qu'admet l'équation caractéristique $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (si l'équation caractéristique n'admet pas cette racine, il faut poser $r = 0$); $P_l(x)$ et $Q_l(x)$ sont des polynômes complets en x de l-ième degré à coefficients indéterminés, l étant égal au plus grand des nombres n et m ($l = n \geqslant m$, ou $l = m > n$):

$$P_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + A_l,$$
$$Q_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + B_l.$$

Soulignons encore une fois que les polynômes $P_l(x)$ et $Q_l(x)$ doivent être complets (c'est-à-dire qu'ils doivent contenir toutes les puissances de x, de zéro à l), à coefficients indéterminés distincts des mêmes puissances de x dans les deux polynômes et que, par ailleurs, si au moins l'une des fonctions $\cos\beta x$ ou $\sin\beta x$ entre dans l'expression de la fonction $f(x)$, alors dans $u(x)$, il faut toujours introduire les deux fonctions.

On peut trouver les coefficients indéterminés à partir du système d'équations linéaires algébriques qu'on obtient en identifiant les termes semblables du premier et du second membres de l'équation initiale, après y avoir substitué $u(x)$ à y.

La vérification de la forme de la solution particulière choisie donne la possibilité de comparer tous les termes du second membre de l'équation avec les termes semblables du premier membre apparus à la suite de l'introduction de $u(x)$.

Si le second membre de l'équation initiale est égal à la somme de plusieurs fonctions distinctes de structure examinée, pour la recherche d'une solution particulière d'une telle équation, il faut alors utiliser le *théorème de la superposition des solutions*: il faut trouver les solutions particulières correspondant aux termes isolés du second membre et faire ensuite leur somme qui sera une solution particulière de l'équation initiale (c'est-à-dire de l'équation dont la somme des fonctions correspondantes forme son second membre).

Nota. Les cas particuliers de la fonction $f(x)$ de structure examinée (en présence desquels, on est autorisé à appliquer au second membre la méthode du choix d'une solution particulière) sont représentés par les fonctions suivantes:

1) $f(x) = Ae^{\alpha x}$ (A est une constante) $\{\alpha + \beta i \equiv \alpha\}$.
2) $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ (A et B sont des constantes) $\{\alpha + \beta i \equiv \beta i\}$.
3) $f(x) = p_n(x)$ (polynôme de degré n) $\{\alpha + \beta i \equiv 0\}$.
4) $f(x) = p_n(x)\, e^{\alpha x}$ $\{\alpha + \beta i \equiv \alpha\}$.
5) $f(x) = p_n(x)\cos\beta x + q_m(x)\sin\beta x$ $\{\alpha + \beta i \equiv \beta i\}$.
6) $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (A et B sont des constantes).

605. Trouver la solution particulière de l'équation $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ vérifiant les conditions aux limites

$$y\,|_{x=\ln 2} = 1; \quad y\,|_{x=2\ln 2} = 1.$$

Solution. L'équation caractéristique $k^2 - 2k - 3 = 0$ admet les racines $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène correspondante est $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$. On cherchera la solution particulière de l'équation initiale sous la forme $u = Ae^{4x}$

(du fait que le sinus et le cosinus sont absents dans le second membre, le coefficient de la fonction exponentielle est un polynôme de degré zéro, c'est-à-dire $l = n = 0$ et $r = 0$, du fait que $\alpha = 4$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique).

Ainsi donc,

$$+\left|\begin{array}{r|l} -3 & u = Ae^{4x} \\ -2 & u' = 4Ae^{4x} \\ 1 & u'' = 16Ae^{4x} \end{array}\right.$$

D'où il vient que $u'' - 2u' - 3u = 5Ae^{4x} \equiv e^{4x}$. Donc, $A = \frac{1}{5}$.

Par conséquent, la solution générale de l'équation donnée est

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Pour trouver C_1 et C_2, on fera appel aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} C_1e^{3\ln 2} + C_2e^{-\ln 2} + \frac{1}{5}e^{4\ln 2} = 1, \\ C_1e^{6\ln 2} + C_2e^{-2\ln 2} + \frac{1}{5}e^{8\ln 2} = 1, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 8C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{16}{5} = 1, \\ 64C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{256}{5} = 1. \end{cases}$$

D'où il vient $C_1 = -\frac{491}{600}$, $C_2 = \frac{652}{75}$. Donc,

$$y = \frac{1}{5}e^{4x} + \frac{652}{75}e^{-x} - \frac{491}{600}e^{3x}.$$

606. Intégrer l'équation $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ pour les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^2 + k - 2 = 0$ admet les racines $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, et pour cette raison la solution générale de l'équation homogène est $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$. On cherchera une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme

$$u = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$$

[dans ce cas, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta i = i$; du fait que l'équation caractéristique n'admet pas de telle racine, alors $r = 0$; $m = n = 0$, et, par conséquent, $l = 0$ lui aussi].

Donc,

$$+\left|\begin{array}{r|l} -2 & u = A\cos x + B\sin x \\ 1 & u' = -A\sin x + B\cos x \\ 1 & u'' = -A\cos x - B\sin x \end{array}\right.$$

D'où

$$u'' + u' - 2u = (B - 3A)\cos x + (-3B - A)\sin x \equiv \cos x - 3\sin x.$$

Ainsi, on a le système

$$\begin{cases} B - 3A = 1, \\ 3B + A = 3, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } A = 0,\ B = 1.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation donnée est $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x$. Trouvons C_1 et C_2 en appliquant les conditions initiales :

$$\begin{cases} C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \sin 0 = 1, \\ -2C_1 e^0 + C_2 e^0 + \cos 0 = 2, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -2C_1 + C_2 = 1, \end{cases}$$

D'où $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, c'est-à-dire

$$y = e^x + \sin x.$$

607. Intégrer l'équation $y'' - y' = \operatorname{ch} 2x$, les conditions initiales étant $y(0) = y'(0) = 0$.

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^2 - k = 0$ admet les racines $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. La solution générale de l'équation homogène est $y = C_1 + C_2 \cdot e^x$. Dans ce cas, on cherchera une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $u = A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x$. En différentiant et en effectuant les substitutions nécessaires dans l'équation initiale, on obtient :

$$+\left|\begin{array}{r|l} 0 & u = A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x \\ -1 & u' = 2A \operatorname{sh} 2x + 2B \operatorname{ch} 2x \\ 1 & u'' = 4A \operatorname{ch} 2x + 4B \operatorname{sh} 2x \end{array}\right.$$

D'où

$$u'' - u' = (4A - 2B)\operatorname{ch} 2x + (4B - 2A)\operatorname{sh} 2x \equiv \operatorname{ch} 2x.$$

Donc,

$$\begin{cases} 4A - 2B = 1, \\ -2A + 4B = 0; \end{cases} \quad A = \frac{1}{3},\ B = \frac{1}{6}.$$

La solution générale de l'équation initiale est $y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{3}\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{6}\operatorname{sh} 2x$. Pour la recherche de C_1 et C_2, on s'adresse aux conditions initiales :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot e^0 + \frac{1}{3}\operatorname{ch} 0 + \frac{1}{6}\operatorname{sh} 0 = 0, \\ C_2 \cdot e^0 + \frac{2}{3}\operatorname{sh} 0 + \frac{1}{3}\operatorname{ch} 0 = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{3}, \\ C_2 + \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{3}$. Ainsi, la solution particulière cherchée est de la forme

$$y = -\frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{6}\operatorname{sh} 2x.$$

N o t a. Aux termes de la théorie générale, nous aurions dû présenter le second membre de l'équation donnée sous la forme $\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ et appliquer le théorème de la superposition, c'est-à-dire chercher séparément les solutions correspondant aux termes du second membre $\frac{1}{2}e^{2x}$ et $\frac{1}{2}e^{-2x}$. Nous aurions eu alors:

pour $\frac{1}{2}e^{2x}$: $\alpha = 2$, $\beta = 0$; $\alpha + \beta i = 2$; $r = 0$, $n = l = 0$; donc, $u_1(x) = A_1 e^{2x}$;

pour $\frac{1}{2}e^{-2x}$: $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 i = -2$; $r = 0$; $n_1 = l_1 = 0$; donc, $u_2(x) = B_1 e^{-2x}$.

Pour cette raison, il aurait fallu chercher la solution particulière sous la forme

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x},$$

mais

$$A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x} = A_1(\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x) + B_1(\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x) =$$
$$= (A_1 + B_1)\operatorname{ch} 2x + (A_1 - B_1)\operatorname{sh} 2x = A\operatorname{ch} 2x + B\operatorname{sh} 2x.$$

C'est justement sous cette forme que nous avons cherché la solution de l'équation donnée.

Il faut noter qu'en appliquant la méthode du choix d'une solution particulière, cette dernière est toujours trouvée sous forme d'une fonction ayant la même structure que le second membre de l'équation proposée, mais, ceci étant, cette fonction sera utilement complétée de termes et de facteurs additionnels pour qu'il soit possible d'identifier les termes apparaissant après substitution dans le premier membre de l'équation avec tous les termes (qui leur sont semblables) du second membre.

608. Résoudre l'équation $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^2 - 2k + 2 = 0$ admet les racines $k_{1,2} = 1 \pm i$, et, de ce fait, la solution générale de l'équation homogène est $y = e^x \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. On cherchera une solution particulière sous la forme $u = Ax^2 + Bx + C$ (dans notre cas, $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\alpha + \beta i = 0$; du fait que la racine 0 n'existe pas, $r = 0$; $n = l = 2$). Donc,

$$+\left|\begin{array}{r|l} 2 & u = Ax^2 + Bx + C \\ -2 & u' = 2Ax + B \\ 1 & u'' = 2A \end{array}\right.$$

Ainsi donc,

$$u'' - 2u' + 2u = 2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A) \equiv x^2.$$

D'où

$$2A = 1, \quad 2B - 4A = 0, \quad 2C - 2B + 2A = 0,$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation initiale est

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x + 1)^2.$$

609. Résoudre l'équation $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

Solution. L'équation caractéristique $k^2 + 1 = 0$ admet les racines $k_{1,2} = \pm i$, et, pour cette raison, la solution générale de l'équation homogène est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. En appliquant le principe de superposition, on cherchera une solution particulière de l'équation initiale sous la forme $u = u_1 + u_2 = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$ (on a pour u_1: $f_1(x) = xe^x$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 i = 1$; du fait que cette racine n'existe pas, alors $r_1 = 0$; $n = l = 1$; pour u_2: $f_2(x) = 2e^{-x}$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 0$; $\alpha_2 + \beta_2 i = -1$; $r_2 = 0$; $n_1 = l_1 = 0$).

Ainsi donc,

$$+\left|\begin{array}{c|l} 1 & u = (Ax + B)e^x + Ce^{-x} \\ 0 & u' = Ae^x + (Ax + B)e^x - Ce^{-x} \\ 1 & u'' = 2Ae^x + (Ax + B)e^x + Ce^{-x} \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$u'' + u = 2Axe^x + (2A + 2B)e^x + 2Ce^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}.$$

D'où

$$2A = 1, \; 2A + 2B = 0, \; 2C = 2, \text{ c'est-à-dire } A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2}, \; C = 1.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation initiale est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x}.$$

610. Résoudre l'équation $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

Solution. L'équation caractéristique $k^3 + k^2 - 2k = 0$ admet les racines $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -2$, et, pour cette raison, la solution générale de l'équation homogène est $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$. On cherchera une solution particulière, en appliquant le principe de superposition, sous la forme $u = u_1 + u_2 = x(Ax + B) + Cxe^x$.

En effet, on a pour u_1: $f(x) = x$; $\alpha_1 = \beta_1 = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 i = 0$; du fait que $k_1 = 0$ est une racine simple de l'équation caractéristique, il faut poser $r_1 = 1$, $n_1 = l_1 = 1$. D'où $u_1 = x(Ax + B)$.

Pour u_2: $f_2(x) = -e^x$; $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$; $\alpha_2 + \beta_2 i = 1$. Mais $k_2 = 1$ est aussi la racine simple de l'équation caractéristique. D'où vient que $r_2 = 1$, $n_2 = l_2 = 0$. On a donc, $u_2 = Cxe^x$.

Donc, on a:

$$+\left|\begin{array}{r|l} 0 & u = (Ax+B)\,x + Cxe^x \\ -2 & u' = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x \\ 1 & u'' = 2A + 2Ce^x + Cxe^x \\ 1 & u''' = 3Ce^x + Cxe^x \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$u''' + u'' - 2u' = -4Ax + (2A - 3B) + 3Ce^x \equiv x - e^x.$$

D'où

$$-4A = 1, \quad 2A - 2B = 0, \quad 3C = -1,$$

c'est-à-dire

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation initiale est

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x} - \frac{1}{4}x(x+1) - \frac{1}{3}xe^x.$$

611. Trouver la solution de l'équation $y'' + y = 3\sin x$, vérifiant les conditions aux limites:

$$y(0) + y'(0) = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^2 + 1 = 0$ admet les racines $k_{1,2} = \pm i$, d'où vient que la solution générale de l'équation homogène est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. On cherchera une solution particulière sous la forme $u = x(A\cos x + B\sin x)$ (dans notre cas, $\alpha = 0$, $\beta = i$, $\alpha + \beta i = i$; du fait que i est une racine simple de l'équation caractéristique, alors $r = 1$; $m = n = l = 0$).

Donc, on a:

$$+\left|\begin{array}{r|l} 1 & u = (A\cos x + B\sin x)\cdot x \\ 0 & u' = (-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x) \\ 1 & u'' = 2(-A\sin x + B\cos x) + (-A\cos x - B\sin x)\cdot x \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$u'' + u = -2A\sin x + 2B\cos x \equiv 3\sin x.$$

D'où

$$-2A = 3, \; 2B = 0,$$

ou

$$A = -\frac{3}{2}; \quad B = 0.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation initiale est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{3}{2} x \cos x.$$

On trouve les constantes C_1 et C_2 en appliquant les conditions aux limites:

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{3}{2} x \sin x - \frac{3}{2} \cos x,$$

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \cos 0 = C_1,$$

$$y'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \sin 0 - \frac{3}{2} \cos 0 = C_2 - \frac{3}{2}.$$

D'où

$$y(0) + y'(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = C_2,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 \sin \frac{\pi}{2} + C_2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{2} =$$

$$= -C_1 + \frac{3}{4} \pi.$$

En poursuivant, on a

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 - C_1 + \frac{3}{4} \pi = 0,$$

d'où l'on tire le système d'équations

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{3}{2}, \\ C_1 - C_2 = \frac{3}{4} \pi, \end{cases}$$

dont la résolution nous donne

$$C_1 = \frac{3}{8}(2 + \pi), \quad C_2 = \frac{3}{8}(2 - \pi).$$

Donc, la solution de l'équation initiale, vérifiant les conditions aux limites posées, est de la forme

$$y = \frac{3}{8}[(\pi + 2) \cos x - (\pi - 2) \sin x] - \frac{3}{2} x \cdot \cos x.$$

612. Trouver la solution de l'équation $y'' + y = \operatorname{tg} x$ vérifiant les conditions aux limites $y(0) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

S o l u t i o n. L'équation caractéristique $k^2 + 1 = 0$ admet les racines $k_{1,2} = \pm i$ et, pour cette raison, la solution générale de l'équation homogène est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. On ne saurait chercher une solution particulière de l'équation initiale par la méthode des coefficients indéterminés [$f(x)$ est d'une structure autre que l'on exige] et, de ce fait, on utilisera la méthode de la variation des constantes arbitraires: on cherchera la solution de l'équation sous la forme

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

où les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ seront déduites du système d'équations

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \cdot \sin x + C_2'(x) \cdot \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2'(x) = \sin x,$$

d'où

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx + A = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + A;$$

$$C_2(x) = -\cos x + B.$$

(Au lieu de résoudre ce système, on aurait pu utiliser les formules citées à la page 181.)

Donc, la solution générale de l'équation initiale est

$$y = A \cos x + B \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

où A et B sont des constantes arbitraires que l'on doit déterminer à partir des conditions aux limites:

$$\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 - \cos 0 \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 0, \\ A \cos \frac{\pi}{6} + B \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 0. \end{cases}$$

D'où

$$A = 0, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 3.$$

Par conséquent, la solution vérifiant les conditions aux limites posées est de la forme

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

613. Une chaîne homogène librement pendue sur un crochet glisse sur celui-ci sous l'action de son propre poids (on négligera le frottement). Déterminer en combien de temps la chaîne toute entière glissera-t-elle sur le crochet, si, au moment initial, il y avait d'un côté du crochet 10 m de chaîne et de l'autre, 8 m, la vitesse de la chaîne étant nulle.

S o l u t i o n. Soit P H le poids d'un mètre courant de chaîne. Désignons par x la longueur (en m) de la portion plus grande de la chaîne pendue sur le crochet au bout de t s après le commencement du mouvement. La force $F=[x-(18-x)]\cdot P$ H est appliquée au centre de gravité de la chaîne. La masse de la chaîne est égale à $\frac{18}{g}P$ kg, son accélération est $\ddot{x}$ m/s². On obtient l'équation régissant le mouvement du centre de gravité de la chaîne:

$$\frac{18}{g}P\ddot{x}=(2x-18)P,$$

ou

$$\ddot{x}-\frac{g}{9}x=-g.$$

Il faut intégrer cette équation aux conditions initiales: pour $t=0$, $x=10$, $\dot{x}=0$.

Les racines de l'équation caractéristique sont $k_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{g}}{3}$; on cherchera la solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $u=A$; après substitution dans l'équation, on trouve: $A=9$.

Donc, la solution générale de l'equation est

$$x=C_1e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+9.$$

L'application des conditions initiales donne

$$\begin{cases} C_1+C_2+9=10, \\ \frac{\sqrt{g}}{3}(C_1-C_2)=0, \end{cases}$$

d'où $C_1=C_2=0{,}5$. Ainsi donc,

$$x=\frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}}{2}+9=9+\operatorname{ch}\frac{\sqrt{g}}{3}t.$$

Le temps pendant lequel glissera la chaîne toute entière est déterminé à partir de la condition : pour $t = T$, $x = 18$. Par conséquent,

$$18 = 9 + \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{3} T,$$

ou

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T} + e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}T}}{2} = 9.$$

En résolvant l'équation obtenue par rapport à T, on trouve

$$T = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + 4\sqrt{5}) \approx 2{,}76 \text{ s}.$$

Résoudre les équations :

614. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$. Conditions initiales : $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

Réponse. $y = \frac{1}{8}(e^{5x} + 22e^{3x} + e^{x})$.

615. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$. Conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Réponse. $y = \frac{1}{2} x(x+2) e^{4x}$.

616. $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$.

Réponse. $y = e^{3x}(C_1 \cdot \cos 4x + C_2 \cdot \sin 4x) + \frac{1}{102}(14 \cos x + 5 \sin x)$.

617. $y'' + y = \cos 3x$. Conditions initiales : $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Réponse. $y = -\frac{11}{8} \cos x + 4 \sin x - \frac{1}{8} \cos 3x$.

618. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$.

Réponse. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{64}(24x^2 + 52x + 41)$.

619. $2y'' - y' = 1$. Conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Réponse. $y = 4e^{\frac{1}{2}x} - x - 4$.

620. $y'' + 4y = \sin 2x + 1$. Conditions initiales : $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.

Réponse. $y = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4}(x \cdot \cos 2x - 1)$.

621. $y'' - 4y' = 2 \operatorname{sh} 2x$.

Réponse. $y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{6}(2 \operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x)$.

622. $y'' + 4y = \cos 2x$. Conditions aux limites : $y(0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Réponse. $y = \frac{1}{16}(4x - \pi) \cdot \sin 2x$.

623. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$.

Réponse. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{144}(1 - 12x)\,e^{-2x}$.

624. $y'' - (\alpha + \beta)\,y' + \alpha\beta y = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$.

Réponse. $y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x} + \frac{x}{\alpha - \beta}(ae^{\alpha x} - be^{\beta x})$.

625. $y'' - y = x \cdot \cos^2 x$.

Réponse. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x\cos 2x + \frac{2}{25}\sin 2x$.

626. $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$.

Réponse. $y = C_1e^{5x} + C_2e^{4x} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)e^{4x}$.

627. $y'' - y = 2\,\mathrm{sh}\,x$. Conditions initiales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Réponse. $y = x \cdot \mathrm{ch}\,x$.

628. $y'' - 4y = \mathrm{ch}\,2x$.

Réponse. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{x}{4} \cdot \mathrm{sh}\,2x$.

629. $y'' - 2y' \cdot \cos\varphi + y = 2\sin x \cdot \cos\varphi$.

Réponse. $y = e^{x\cos\varphi}[C_1 \cdot \cos(x\sin\varphi) + C_2 \cdot \sin(x\sin\varphi)] + \cos x$.

630. $y'' - 2y' + 2y = e^{x} \cdot \sin x$.

Réponse. $y = e^{x}(C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x) - \frac{1}{2}xe^{x} \cdot \cos x$.

631. $y'' + 9y = 2\sin x \cdot \sin 2x$. Conditions aux limites: $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Réponse. $y = \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\cos 3x - \frac{1}{6}x\sin 3x + \frac{\pi}{12}\sin 3x$.

632. Montrer que la solution générale de l'équation différentielle $y'' - m^2y = 0$ peut être mise sous la forme $y = C_1 \cdot \mathrm{ch}\,mx + C_2 \times \mathrm{sh}\,mx$.

633. Montrer que la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 - \beta^2)\,y = 0$$

peut être mise sous la forme $y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \mathrm{ch}\,\beta x + C_2 \cdot \mathrm{sh}\,\beta x)$.

634. Déterminer la loi du mouvement d'un point matériel de masse m se déplaçant suivant une droite sous l'action d'une force de rétablissement orientée vers le point zéro et directement proportionnelle à la distance du point en mouvement au point zéro, si la résistance opposée par le milieu est nulle et que le point subit l'action exercée par une force extérieure $F = A\sin\omega t$.

Réponse. $m\ddot{x} + ax = A \cdot \sin\omega t$, $x = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t + \frac{A}{a - m\omega^2}\sin\omega t$, si $\omega \neq \beta = \sqrt{\frac{a}{m}}$, et $x = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t - \frac{At}{2\beta m} \cdot \cos\beta t$, si $\omega = \beta = \sqrt{\frac{a}{m}}$.

Appliquer dans les exercices 635 à 638 la méthode de la variation des constantes arbitraires.

635. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.

Réponse. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \cdot \ln \left| \cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \cdot \arcsin (\sqrt{2} \cdot \sin x)$.

636. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$.

Réponse. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \ln (1 + e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x} \times \times \operatorname{arctg} e^x$.

637. $y'' + 4y = \operatorname{cotg} 2x$.

Réponse. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln \operatorname{tg} 2x$.

638. $y'' \cdot \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{4} y \cos \frac{x}{2} = 1$.

Réponse. $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} + 2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} \cdot \ln \cos \frac{x}{2}$.

639. Résoudre le problème 613 en prenant en considération le frottement de la chaîne au crochet : supposons que la force de frottement soit égale au poids de 1 m de chaîne.

Indication. L'équation régissant le mouvement du centre de gravité de la chaîne est

$$18 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = gx - (18 - x) g - g \cdot 1.$$

Réponse. $t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln (17 + 12\sqrt{2})$.

5. **Equation d'Euler.** Une équation linéaire à coefficients variables de la forme

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x \cdot y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

ou d'une forme plus générale

$$(ax+b)^n \cdot y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = f(x) \qquad (2)$$

s'appelle *équation d'Euler.* Ici, a_i sont des coefficients constants.

Les substitutions $x = e^t$ dans l'équation (1) et $ax + b = e^t$ dans (2) transforment ces deux équations en équations linéaires à coefficients constants.

640. Résoudre l'équation

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

Solution. En posant $x=e^t$ ou $t=\ln x$, d'où $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, on obtient

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}e^{-t},$$

$$y''=\frac{d}{dt}[e^{-t}\dot{y}]\frac{dt}{dx}=(\dot{y}e^{-t})'_t\cdot e^{-t}=(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}$$

(les points désignent la dérivation par rapport à t). Alors, l'équation initiale prend la forme

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})-e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+y=0,$$

ou

$$\ddot{y}-2\dot{y}+y=0.$$

L'équation caractéristique $k^2-2k+1=0$ admet les racines $k_1=k_2=1$. Par conséquent, la solution générale est

$$y=(C_1+C_2t)e^t, \quad \text{ou} \quad y=(C_1+C_2\ln x)x.$$

641. Résoudre l'équation

$$(4x-1)^2\cdot y''-2(4x-1)y'+8y=0.$$

Solution. Posons $4x-1=e^t$, alors

$$dx=\frac{1}{4}e^t\,dt, \quad \frac{dt}{dx}=4e^{-t}.$$

D'où

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=4e^{-t}\cdot y, \quad y''=16e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}).$$

L'équation initiale prend la forme

$$16e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})-4\cdot 2e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+8y=0,$$

ou

$$2\ddot{y}-3\dot{y}+y=0.$$

L'équation caractéristique $2k^2-3k+1=0$ admet les racines $k_1=1$, $k_2=\frac{1}{2}$. Par conséquent, la solution générale est

$$y=C_1e^t+C_2e^{\frac{1}{2}t}, \quad \text{ou} \quad y=C_1(4x-1)+C_2\sqrt{4x-1}.$$

642. Résoudre l'équation

$$y''-xy'+y=\cos\ln x.$$

Solution. Posons $x=e^t$, alors

$$t=\ln x, \quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t},$$

on obtient

$$y' = \dot{y} \cdot e^{-t}, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y})\, e^{-2t}.$$

L'équation initiale prendra la forme

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \cos t.$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = (C_1 + C_2 t)\, e^t,$$

alors que la solution particulière de l'équation non homogène doit être cherchée sous la forme

$$u = A \cos t + B \sin t.$$

Alors

$$\begin{array}{c|r|l} & 1 & u = A\cos t + B\sin t \\ + & -2 & u' = -A\sin t + B\cos t \\ & 1 & u'' = -A\cos t - B\sin t \\ \hline \end{array}$$

Donc,

$$u'' - 2u' + u = -2B \cos t + 2A \sin t \equiv \cos t,$$

d'où

$$B = -\frac{1}{2}, \quad A = 0.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation initiale est

$$y = (C_1 + C_2 t)\, e^t - \frac{1}{2} \sin t,$$

ou

$$y = (C_1 + C_2 \ln x)\, x - \frac{1}{2} \sin \ln x.$$

Résoudre les équations:

643. $x^2 y'' - xy' + 2y = 0.$

Réponse. $y = x\,(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x).$

644. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 3 \ln^2 x.$

Réponse. $y = C_1 x + C_2 x^3 + \frac{1}{9}(9 \ln^2 x + 24 \ln x + 26).$

645. $x^2 y'' + xy' + y = \sin(2 \ln x).$

Réponse. $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x - \frac{1}{3} \sin(2 \ln x).$

646. $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}.$ Conditions initiales: $y(1) = 1$, $y'(1) = 0.$

Réponse. $y = \frac{1}{2x}(\ln^2 x + 2 \ln x + 2).$

647. $x^2y''-3xy'+4y=\frac{1}{2}x^3$. Conditions aux limites: $y(1)=$ $=\frac{1}{2}$, $y(4)=0$.

Réponse. $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{x^2}{\ln 2}\cdot\ln x$.

§ 4. Intégration des équations différentielles à l'aide des séries

1. Applications des séries à la résolution des équations différentielles. Dans certains cas, lorsque l'intégration d'une équation différentielle s'avère impossible à l'aide des fonctions élémentaires, on cherche la solution de cette équation sous forme d'une série entière

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n.$$

On trouve les coefficients indéterminés C_n ($n=0, 1, 2, \ldots$) en substituant la série dans l'équation intéressée et en égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de $x-x_0$ dans les deux membres de l'égalité obtenue. Si l'on parvient à déterminer tous les coefficients de la série, alors la série obtenue définit la solution dans tout son domaine de convergence.

Chaque fois qu'on a besoin de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation $y'=f(x, y)$ aux conditions initiales $y|_{x=x_0}=y_0$, on peut chercher la solution à l'aide de la série de Taylor:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

où $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0, y_0)$, alors que les autres dérivées $y^{(n)}(x_0)$ se calculent successivement en dérivant l'équation initiale et en substituant, dans le résultat de la dérivation, à $x, y, y', \ldots$ les valeurs de x_0, y_0, y_0' et de toutes les autres dérivées successives. En procédant de la même façon et en utilisant la série de Taylor, on peut intégrer aussi des équations différentielles d'ordres supérieurs.

L'application de ces méthodes est illustrée par les exemples ci-dessous.

648. Intégrer l'équation $y''-x^2y=0$.

Solution. On va chercher la solution de cette équation sous forme de la série $y=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots$. En substituant y et y'' dans l'équation initiale, on trouve:

$$[2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3x+4\cdot 3C_4x^2+\ldots+(n+2)(n+1)C_{n+1}x^n+\ldots]-$$
$$-x^2[C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots]\equiv 0.$$

Regroupons les termes des mêmes puissances de x:

$$2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3x^2+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+4)(n+3)C_{n+4}-C_n]x^{n+2}\equiv 0.$$

En égalant à zéro tous les coefficients de la série obtenue (pour que l'équation devienne une identité), on trouve :

$$C_2 = C_3 = 0\,; \quad C_{n+4} = \frac{C_n}{(n+3)(n+4)} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Cette dernière relation permet de trouver successivement tous les coefficients du développement cherché (C_0 et C_1 restent arbitraires et jouent le rôle de constantes d'intégration arbitraires) :

$$C_{4k} = \frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8 \ldots (4k-1)\cdot 4k}\,; \quad C_{4k+1} = \frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9 \ldots 4k(4k+1)}\,;$$

$$C_{4k+2} = C_{4k+3} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Donc, on trouve

$$y = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8 \ldots (4k-1)\,4k} + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9 \ldots 4k(4k+1)}.$$

Les séries obtenues convergent tout au long de l'axe numérique et définissent deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation initiale.

En développant en série suivant les puissances de x intégrer les équations ci-dessous et définir le domaine d'application de la solution obtenue.

649. $y' + xy = 0$.

Réponse. $y = C_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots\right) = C_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$ (la solution existe sur tout l'axe numérique).

650. $y' = x - 2y$. Conditions initiales : $y(0) = 0$.

Indication. En vertu des conditions initiales, poser $C_0 = 0$.

Réponse. $y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{4\cdot n!} = \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ (la solution existe sur tout l'axe numérique).

651. $y'' + xy' + y = 0$.

Réponse. $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n+1)}$ (le domaine d'existence de la solution est représenté par l'axe numérique tout entier).

652. $y'' - xy' - 2y = 0$.

Réponse. $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1\cdot 3 \ldots (2n-1)} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4 \ldots 2n}$ (le domaine

d'existence de la solution est représenté par l'axe numérique tout entier).

653. $y'' + x^2y = 0$. Conditions initiales: $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Indication. En vertu des conditions initiales, poser $C_0 = 0$, $C_1 = 1$.

Réponse. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\ldots4n(4n+1)}$ (le domaine d'existence de la solution est représenté par l'axe numérique tout entier).

654. Intégrer d'une manière approchée à l'aide de la série de Taylor l'équation $y' = x^2 + y^2$, si $y(0) = 1$, en prenant les six premiers termes différents de zéro du développement.

Solution. On déduit de l'équation et des conditions initiales:

$$y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1.$$

En dérivant l'équation donnée, on trouve successivement:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'',$$
$$y^{IV} = 6y'y'' + 2yy''', \quad y^{V} = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}.$$

En posant $x = 0$ et en utilisant les valeurs $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, on trouve successivement:

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 8, \quad y^{IV}(0) = 28, \quad y^{V}(0) = 144.$$

La solution cherchée est de la forme

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + \ldots$$

655. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Trouver les quatre premiers termes différents de zéro du développement.

Solution. En dérivant l'équation $y'' = x + y^2$, on a

$$y''' = 1 + 2yy', \quad y^{IV} = 2yy'' + 2y'^2, \quad y^{V} = 2yy''' + 6y'y'',$$
$$y^{VI} = 2yy^{IV} + 8y'y^{IV} + 6y''^2.$$

Pour $x = 0$, on obtient:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1,$$
$$y^{IV}(0) = 2, \quad y^{V}(0) = 0, \quad y^{VI}(0) = 16.$$

La solution est de la forme

$$y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \ldots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \ldots$$

656. $y' = x^2y + y^3$, $y(0) = 1$. Trouver les quatre premiers termes différents de zéro du développement.

Réponse. $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{17x^3}{3!} + \ldots$

657. $y' = x + 2y^2$, $y(0) = 0$. Trouver les deux premiers termes différents de zéro du développement.

Réponse. $y = \frac{x^2}{2!} + \frac{12x^5}{5!} + \ldots$

658. $y'' - xy^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Trouver les quatre premiers termes différents de zéro du développement.

Réponse. $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \ldots$

659. $y' = 2x - y$. Conditions initiales: $y(0) = 2$. Trouver la solution précise.

Réponse. $y = 4\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + 2(x-1) = 4e^{-x} + 2(x-1)$.

660. $y' = y^2 + x$. Conditions initiales: $y(0) = 1$. Trouver les cinq premiers termes du développement.

Réponse. $y = 1 + x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{34x^4}{4!} + \ldots$

661. $y'' = (2x - 1)y - 1$. Conditions initiales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Réponse. $y = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^5 - \ldots$ (les dérivées successives pour $x = 0$ sont liées par la relation de récurrence $y_0^{(n+2)} = -y_0^{(n)} + 2ny_0^{(n-1)}$).

2. Equation de Bessel. Une équation différentielle linéaire à coefficients variables de la forme

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (\lambda = \text{const}) \qquad (*)$$

s'appelle *équation de Bessel* (au même type se ramène l'équation $x^2y'' + xy' + (m^2x^2 - \lambda^2)y = 0$ par la substitution $mx = \xi$).

On cherchera la solution de l'équation (*) sous forme d'une série entière généralisée, c'est-à-dire sous forme de produit d'une certaine puissance de x par la série entière:

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{r+k}. \qquad (**)$$

En substituant la série entière généralisée dans l'équation (*) et en égalant à zéro les coefficients de chaque puissance de x dans le premier membre de l'équation, on obtient le système

$$\begin{array}{c|l}
x^r & (r^2-\lambda^2)\cdot a_0 = 0. \\
x^{r+1} & [(r+1)^2-\lambda^2]\cdot a_1 = 0, \\
x^{r+2} & [(r+2)^2-\lambda^2]\cdot a_2 + a_0 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{r+k} & [(r+k)^2-\lambda^2]\cdot a_k + a_{k-2} = 0. \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

En considérant que $a_0 \neq 0$, on déduit du système donné $r_{1,2} = \pm\lambda$. Soit $r_1 = \lambda$. On déduit alors de la seconde équation du système $a_1 = 0$, et de l'équation

$[(r+k)^2-\lambda^2]\,a_k=-a_{k-2}$, en donnant à k les valeurs 3, 5, 7, ..., on conclut que $a_3=a_5=a_7=\ldots=a_{2k+1}=0$. Pour les coefficients pairs, on obtient les expressions

$$a_2=\frac{-a_0}{(2\lambda+2)\cdot 2},\quad a_4=\frac{-a_2}{(2\lambda+4)\cdot 4}=\frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 2^4},\ \ldots,$$

$$a_{2k}=\frac{-a_{2k-2}}{(2\lambda+2)\cdot 2\cdot k}=(-1)^{k+1}\cdot\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k\,(2\lambda+2)(2\lambda+4)\ldots(2\lambda+2k)}.$$

En substituant les coefficients trouvés dans la série (**), on obtient la solution

$$y_1(x)=a_0x^\lambda\left[1-\frac{x^2}{2(2\lambda+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2\lambda+2)(2\lambda+4)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(2\lambda+2)(2\lambda+4)(2\lambda+6)}+\ldots\right]=$$
$$=a_0\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{\lambda+2k}}{4^k\cdot k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)},$$

où le coefficient a_0 reste arbitraire.

Pour $r_2=-\lambda$, tous les coefficients a_k sont définis d'une manière analogue seulement dans le cas où λ n'est pas un nombre entier. On peut alors obtenir la solution en faisant substituer $-\lambda$ à λ dans la solution précédente $y_1(x)$:

$$y_2(x)=a_0\cdot x^{-\lambda}\cdot\left[1-\frac{x^2}{2(-2\lambda+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)(-2\lambda+6)}+\ldots\right]=$$
$$=a_0\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{-\lambda+2k}}{4^k\cdot k!\,(-\lambda+1)(-\lambda+2)\ldots(-\lambda+k)}.$$

Les séries entières obtenues convergent pour toutes les valeurs de x; on s'en convainc aisément en appliquant le critère de d'Alembert. Les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes car leur rapport n'est pas constant.

La solution $y_1(x)$ multipliée par la constante $a_0=\dfrac{1}{2^\lambda\cdot\Gamma(\lambda+1)}$ est appelée *fonction de Bessel* (ou *fonction cylindrique*) *de première espèce d'ordre* λ que l'on désigne par le symbole $J_\lambda(x)$. La solution y_2 est désignée par $J_{-\lambda}(x)$.

Par conséquent, la solution générale de l'équation (*) pour λ non entier est de la forme

$$y(x)=C_1\cdot J_\lambda(x)+C_2\cdot J_{-\lambda}(x),$$

où C_1 et C_2 sont des valeurs constantes arbitraires.

Dans le choix généralement adopté de la constante a_0 participe l'ainsi appelée *fonction gamma* $\Gamma(\lambda+1)$ qui est définie par l'intégrale impropre:

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{\lambda-1}\,dx\qquad(\lambda>0).$$

La fonction gamma possède les propriétés essentielles suivantes:

1) $\Gamma(\lambda+1)=\lambda\cdot\Gamma(\lambda)$,

2) $\Gamma(n)=(n-1)!$ (n est un nombre naturel);

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

On peut montrer que, pour λ égal à la moitié d'un nombre impair, la fonction de Bessel s'exprime par des fonctions élémentaires, car, dans ce cas, la fonction gamma figurant dans la définition de la fonction de Bessel

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2^\lambda\cdot\Gamma(\lambda+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{\lambda+2k}}{4^k\cdot k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k},$$

[le produit $(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)\,\Gamma(\lambda+1)$ est remplacé, en vertu de la propriété 1, par $\Gamma(\lambda+k+1)$] prend les valeurs suivantes:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{-1/2}\,dx=2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

(on a utilisé ici la valeur de l'intégrale de Poisson);

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};\ \ldots$$

On peut écrire la fonction de Bessel J_λ, pour $\lambda=n$ (un nombre naturel), d'une manière plus courte:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Pour λ entier négatif, la solution particulière ne s'exprime pas par la fonction de Bessel de première espèce et l'on doit la chercher sous la forme

$$K_n(x)=J_x(x)\cdot\ln x+x^{-n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k.$$

En substituant cette expression dans l'équation (*), on détermine les coefficients b_k. La fonction $K_n(x)$ multipliée par une certaine constante est appelée *fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre n.*

662. Trouver la fonction de Bessel pour $\lambda=0$.

Solution. En utilisant l'égalité

$$J_\lambda(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\lambda},$$

pour $\lambda = 0$, on obtient

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{4^k \cdot k!\cdot k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{4^k \cdot (k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2 \cdot (1\cdot 2)^2} - \frac{x^6}{4^3 (1\cdot 2\cdot 3)^2} + \ldots$$

663. Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$.

S o l u t i o n. Vu que $\lambda = \frac{1}{2}$, la solution générale de l'équation est de la forme

$$y = C_1 \cdot J_{1/2} + C_2 \cdot J_{-1/2},$$

où

$$J_{1/2} = \frac{1}{2^{1/2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot x^{1/2} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

On obtient de la même façon $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

Par conséquent, la solution générale est

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x).$$

664. Trouver $J_1(x)$.

Réponse. $J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} - \ldots\right)$.

665. Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) y = 0$.

Réponse. $y = \frac{2}{3\sqrt{x}} \left[C_1 x^{3/2} \left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} - \ldots\right) + C_2 x^{-3/2} \times \right.$
$\left. \times \left(1 + \frac{x^2}{2\cdot 1} - \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 1} + \ldots\right)\right]$.

666. Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right) y = 0$.

Réponse. $y = C_1 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3} + k + 1\right)} + C_2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \times$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3} + k + 1\right)} = \left[C_1 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + C_2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3}\right] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3} + k + 1\right)}.$$

§ 5. Systèmes d'équations différentielles

1. Système normal d'équations différentielles. Un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions inconnues d'une variable indépendante t, est appelé *système normal.*

Si les seconds membres d'un système normal d'équations différentielles sont des fonctions linéaires par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors le système d'équations différentielles est dit *linéaire.*

Parfois, on parvient à ramener un système normal d'équations différentielles à une seule équation du n-ième ordre ne contenant qu'une seule fonction inconnue. La réduction d'un système normal à une seule équation peut être obtenue en différentiant une des équations du système et en éliminant toutes les inconnues, à l'exception de l'une d'elles (*méthode* dite *d'élimination*).

Dans certains cas, en combinant les équations du système, on arrive, après quelques transformations peu compliquées, à obtenir des équations aisément intégrables (*méthode* dite *de combinaisons intégrables*), ce qui permet de trouver la solution du système.

667. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y$$

pour les conditions initiales: $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

Solution. Dérivons par rapport à t la première équation $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$; en éliminant $\frac{dy}{dt}$ et y de l'équation obtenue, on a $\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0$. Les racines de l'équation caractéristique $k^2 - 2 = 0$ seront $k = \pm\sqrt{2}$. Par conséquent, la solution générale pour x est de la forme $x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}$.

On trouve la solution générale pour y à partir de la première équation :

$$y = \frac{dx}{dt} - x = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Faisons appel aux conditions initiales pour trouver les constantes arbitraires :

$$C_1 + C_2 = 2, \quad \sqrt{2}(C_1 - C_2) - (C_1 + C_2) = 0.$$

D'où

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}, \quad C_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Donc, la solution particulière est de la forme

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{t\sqrt{2}}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t\sqrt{2}},$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}.$$

668. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{2x+3y},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{y}{2x+3y}$$

dont les conditions initiales sont: $x(0)=1$, $y(0)=2$.

Solution. Première combinaison intégrable: divisons la première équation par la seconde:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y},\quad \text{ou}\quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

d'où

$$\ln x=\ln y+\ln C_1,$$

c'est-à-dire

$$x=C_1\cdot y.$$

Seconde combinaison intégrable: additionnons la première et la seconde équation respectivement doublée et triplée:

$$2\cdot\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}=1,\quad \text{ou}\ 2dx+3dy=dt,$$

c'est-à-dire

$$2x+3y=t+C_2.$$

On déduit du système d'équations $x=C_1y$, $2x+3y=t+C_2$ la solution générale du système:

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3},\quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}.$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$1=\frac{C_1C_2}{2C_1+3},\quad 2=\frac{C_2}{2C_1+3}.$$

D'où $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=8$.

En substituant dans la solution générale les valeurs $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=8$, on trouve les solutions particulières vérifiant les conditions initiales:

$$x=\frac{1}{8}t+1,\quad y=\frac{1}{4}t+2.$$

669. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt}=2y,\quad \frac{dy}{dt}=2z,\quad \frac{dz}{dt}=2x.$$

Solution. Dérivons par rapport à t la première équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\cdot\frac{dy}{dt};$$

en éliminant $\frac{dy}{dt}$ de l'équation obtenue, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4z.$$

Dérivons encore une fois par rapport à t l'équation du second ordre obtenue :

$$\frac{d^3x}{dt^3}=4\cdot\frac{dz}{dt}.$$

En éliminant $\frac{dz}{dt}$, on obtient

$$\frac{d^3x}{dt^3}-8x=0,$$

c'est-à-dire nous sommes arrivés à une équation à une seule fonction inconnue. Après avoir résolu cette équation linéaire homogène du troisième ordre, on obtient

$$x=C_1e^{2t}+e^{-t}(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\sin t\sqrt{3}).$$

La solution générale pour y s'obtient de la première équation :

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}[2C_1e^{2t}-e^{-t}(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\sin t\sqrt{3})+$$
$$+e^{-t}\cdot\sqrt{3}(C_3\cos t\sqrt{3}-C_2\sin t\sqrt{3})],$$

ou

$$y=C_1e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}[(C_3\sqrt{3}+C_2)\cos t\sqrt{3}-(C_2\sqrt{3}+C_3)\sin t\sqrt{3}].$$

On déduit z de la seconde équation :

$$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dt}=C_1e^{2t}-$$
$$-\frac{1}{2}e^{-t}[(C_3\sqrt{3}+C_2)\cos t\sqrt{3}-(C_2\sqrt{3}-C_3)\sin t\sqrt{3}].$$

Résoudre les systèmes d'équations différentielles :

670. $\frac{dx}{dt}=2x+y$, $\frac{dy}{dt}=x+2y$. Conditions initiales : $x(0)=1$, $y(0)=3$.

Réponse. $x=2e^{3t}-e^t$, $y=2e^{3t}+e^t$.

671. $\frac{dx}{dt}=4x+6y$, $\frac{dy}{dt}=2x+3y+t$.

Réponse. $x=C_1+C_2e^{7t}-\frac{3}{49}t(7t+2)$,

$$y=-\frac{2}{3}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{7t}+\frac{1}{49}(14t^2-3t-1).$$

672. $\frac{dx}{dt}=e^{3t}-y,\ \frac{dy}{dt}=2e^{3t}-x.$

Réponse. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+\frac{1}{8}e^{3t},$

$$y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+\frac{5}{8}e^{3t}.$$

673. $y'=e^x-z,\ z'=e^{-x}+y.$

Réponse. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\operatorname{sh} x,$

$$z=C_1\sin x-C_2\cos x+\operatorname{sh} x.$$

674. $\frac{dx}{dt}=y+t,\ \frac{dy}{dt}=x+e^t.$ Conditions initiales: $x(0)=1,$ $y(0)=0.$

Réponse. $x=\frac{1}{4}(3e^t+5e^{-t})+\frac{1}{2}te^t-1,$

$$y=\frac{5}{4}(e^t-e^{-t})+\frac{1}{2}te^t-t.$$

675. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{x+y},\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{x+y}.$ Conditions initiales: $x(0)=2,$ $y(0)=4.$

Réponse. $x=\frac{1}{3}t+2,\ y=\frac{2}{3}t+4.$

676. $\frac{dx}{dt}=2x+y+\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-x+2\sin t.$

Réponse. $x=(C_1+C_2t)e^t+\frac{1}{2}\cos t,$

$$y=[C_2(1-t)-C_1]e^t-2\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

677. $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2(x+y),\ \frac{dy}{dt}=3x+y.$

Réponse. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t},\ y=3C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}.$

678. $\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=1,\ \frac{dy}{dt}=x+y+\frac{2x}{t}-1.$

Réponse. $x=\frac{1}{3}t+\frac{C_2}{t^2},\ y=C_1e^t-\frac{1}{3}t-\frac{2C_2}{t^3}.$

679. $\frac{dx}{dt}=x^2+xy,\ \frac{dy}{dt}=xy+y^2.$

Indication. Examiner deux combinaisons intégrables: 1) additionner les équations; 2) diviser terme à terme la première équation par la seconde.

Réponse. $x=-\frac{1}{(1+C_1)t+C_2},\quad y=-\frac{C_1}{(1+C_1)t+C_2}.$

680. $\frac{dx}{dt}+\frac{2dy}{dt}-2(x-y)=3e^t,$

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2x+y=4e^{2t}.$$

Réponse. $x = C_1 e^{-6t} + e^{2t} - \frac{3}{7} e^t$,

$$y = C_2 e^{-t} - \frac{4}{5} C_1 e^{-6t} + \frac{9}{14} e^t.$$

681. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2 y = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - m^2 x = 0.$

Réponse. $x = e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}t} \cdot \left(C_1 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} t + C_2 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} t\right) +$

$$+ e^{\frac{-m\sqrt{2}}{2}t} \cdot \left(C_3 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} t + C_4 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} t\right),$$

$$y = e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}t} \left(C_1 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} t - C_2 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} t\right) +$$

$$+ e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}t} \left(C_4 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} t - C_3 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} t\right).$$

682. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$

Réponse.

$$x^2 = \frac{2t+C_1}{1+C_2^2+C_3^2}, \quad y^2 = \frac{C_2^2(2t+C_1)}{1+C_2^2+C_3^2}, \quad z^2 = \frac{C_3^2(2t+C_1)}{1+C_2^2+C_3^2}.$$

2. Résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants à l'aide des matrices (méthode d'Euler modifiée). Soit donné un système de n équations différentielles à n fonctions inconnues dont les coefficients sont constants:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

On peut recopier ce système sous forme d'une équation différentielle matricielle

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X.$$

Ici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

On cherchera la solution du système sous la forme

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = p_2 e^{\lambda t}, \ \ldots, \ x_n = p_n e^{\lambda t}.$$

En substituant les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans le système d'équations différentielles, on obtient un système d'équations linéaires algébriques portant sur $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22}-\lambda)\, p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\, p_n = 0. \end{cases}$$

Le système doit admettre une solution non nulle, c'est pourquoi, pour déterminer λ, on obtient une équation du n-ième degré

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière équation est l'équation caractéristique de la matrice A et, en même temps, l'équation caractéristique du système.

Supposons que l'équation caractéristique admette n racines distinctes: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ qui sont les nombres caractéristiques de la matrice A. A chacun des nombres caractéristiques on met en correspondance son vecteur propre.

Soit λ_k un nombre caractéristique auquel il correspond un vecteur propre $(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$, où $k = 1, 2, \ldots, n$. Alors, le système d'équations différentielles possède n solutions:

la première solution correspondant à la racine $\lambda = \lambda_1$ est:

$$x_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 t}, \quad x_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 t}, \ \ldots, \ x_{n1} = p_{n1}\cdot e^{\lambda_1 t};$$

la deuxième solution correspondant à la racine $\lambda = \lambda_2$ est:

$$x_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad x_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 t}, \ \ldots, \ x_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la n-ième solution correspondant à la racine $\lambda = \lambda_n$ est:

$$x_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n t}, \quad x_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n t}, \ \ldots, \ x_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

On a obtenu un système fondamental de solutions. La solution générale du système est:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1x_{11} + C_2x_{12} + \ldots + C_nx_{1n}, \\ x_2 &= C_1x_{21} + C_2x_{22} + \ldots + C_nx_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \ldots + C_nx_{nn}. \end{aligned}$$

Les cas des racines complexes et multiples sont examinés dans les exemples ci-dessous.

683. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Solution. Formons l'équation caractéristique de la matrice du système

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$

Les racines de cette équation $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$ sont représentées par les nombres caractéristiques de la matrice.

Pour $\lambda = 1$, les équations servant à déterminer le vecteur propre sont de la forme $(7-1)\,p_1 + 3p_2 = 0$ et $6p_1 + (4-1)\,p_2 = 0$ et se ramènent à une seule équation $2p_1 + p_2 = 0$. Cette dernière définit le vecteur $(1;\ -2)$.

Pour $\lambda = 10$, on obtient les équations $(7-10)\,p_1 + 3p_2 = 0$, $6p_1 + (4-10)\,p_2 = 0$, ou $p_1 - p_2 = 0$. Cette équation définit le vecteur $(1;\ 1)$.

On obtient le système fondamental de solutions: pour $\lambda = 1$, $x_{11} = e^t$ et $x_{21} = -2e^t$; pour $\lambda = 10$, $x_{12} = e^{10t}$ et $x_{22} = e^{10t}$.

La solution générale est

$$x_1 = C_1e^t + C_2e^{10t}, \quad x_2 = -2C_1e^t + C_2e^{10t}.$$

684. Trouver la solution générale du système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

Solution. Formons l'équation caractéristique de la matrice du système:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En explicitant, on trouve

$$(6-\lambda)(\lambda^2-9) - 48 - 12 + 12 + 4\lambda + 72 - 12\lambda + 36 - 12\lambda = 0,$$

ou finalement

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Cette équation admet les racines $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Déterminons les vecteurs propres de la matrice A.

Pour $\lambda = 1$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 4p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 + 2p_3 = 0, \end{cases}$$

dont l'une se déduit des deux autres.

Prenons, par exemple, les deux premières équations:

$$5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0,$$
$$p_1 - 4p_2 - p_3 = 0.$$

D'où

$$p_1 = \begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 8k, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 4k,$$
$$p_3 = \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \cdot k = -8k.$$

En posant $k = \frac{1}{4}$, on obtient le vecteur propre $(2;\ 1;\ -2)$.

Pour $\lambda = 2$, on a le système

$$\begin{cases} 4p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 5p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 + p_3 = 0. \end{cases}$$

En utilisant de nouveau les deux premières équations (la troisième est une équation dépendante), on trouve:

$$p_1 = \begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 7k, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 3k,$$
$$p_3 = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = -8k.$$

En posant $k = 1$, on trouve le vecteur propre $(7;\ 3;\ -8)$.

Pour $\lambda = 3$, on a le système

$$\begin{cases} 3p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 6p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 = 0. \end{cases}$$

On déduit de la dernière équation $p_1 = 3p_2$. Substituons cette valeur de p_1 dans la première équation, d'où l'on trouve $p_3 = -3p_2$. En posant $p_2 = 1$, on obtient $p_1 = 3$, $p_3 = -3$. Le vecteur propre est $(3;\ 1;\ -3)$.

Le système fondamental de solutions est:

pour $\lambda_1 = 1$: $x_{11} = 2e^t$, $x_{21} = e^t$, $x_{31} = -2e^t$;
pour $\lambda_2 = 2$: $x_{12} = 7e^{2t}$, $x_{22} = 3e^{2t}$, $x_{32} = -8e^{2t}$;
pour $\lambda_3 = 3$: $x_{13} = 3e^{3t}$, $x_{23} = e^{3t}$, $x_{33} = -3e^{3t}$.

La solution générale s'écrit sous la forme

$$x_1 = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t},$$
$$x_2 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$
$$x_3 = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}.$$

685. Trouver la solution générale du système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

S o l u t i o n. Formons l'équation caractéristique de la matrice du système :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4-\lambda)^2 = -9, \quad \lambda - 4 = \pm 3i, \quad \lambda = 4 \pm 3i.$$

Déterminons les vecteurs propres.

Pour $\lambda_1 = 4 + 3i$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Donc, $p_2 = ip_1$. En faisant $p_1 = 1$, on obtient $p_2 = i$. Le vecteur propre est $(1\,;\ i)$.

Pour $\lambda_2 = 4 - 3i$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

D'où l'on trouve le vecteur propre $(1\,;\ -i)$.

Le système fondamental de solutions est :

pour $\lambda_1 = 4 + 3i$:

$$x_{11} = e^{(4+3i)t} = e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t),$$
$$x_{21} = ie^{(4+3i)t} = e^{4t}(-\sin 3t + i \cos 3t)\,;$$

pour $\lambda_2 = 4 - 3i$:

$$x_{12} = e^{(4-3i)t} = e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t),$$
$$x_{22} = e^{4t}(-\sin 3t - i \cos 3t).$$

Ainsi, on obtient la solution générale

$$x_1 = C_1 e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t) + C_2 e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t),$$
$$x_2 = C_1 e^{4t}(-\sin 3t + i \cos 3t) + C_2 e^{4t}(-\sin 3t - i \cos 3t),$$

c'est-à-dire

$$x_1 = e^{4t}[(C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)\, i \sin 3t],$$
$$x_2 = e^{4t}[-(C_1 + C_2)\sin 3t + (C_1 - C_2)\, i \cos 3t].$$

En posant $C_1 + C_2 = C_1^*$, $(C_1 - C_2)\, i = C_2^*$, on obtient

$$x_1 = e^{4t}\,(C_1^* \cos 3t + C_2^* \sin 3t),$$
$$x_2 = e^{4t}\,(-C_1^* \sin 3t + C_2^* \cos 3t).$$

On peut trouver la solution générale d'une autre manière. Pour ce faire, dans les solutions correspondant à l'un des nombres caractéristiques complexes, il faut séparer les parties réelle et imaginaire (le nombre caractéristique conjugué ne sera pas examiné):

$$e^{(4+3i)t} = e^{4t}\cdot\cos 3t + ie^{4t}\cdot\sin 3t,$$
$$ie^{(4+3i)t} = -e^{4t}\cdot\sin 3t + ie^{4t}\cdot\cos 3t.$$

On obtient deux solutions particulières linéairement indépendantes:

$$x_{11} = e^{4t}\cdot\cos 3t, \quad x_{21} = -e^{4t}\cdot\sin 3t,$$
$$x_{12} = e^{4t}\cdot\sin 3t, \quad x_{22} = e^{4t}\cdot\cos 3t.$$

La solution générale est

$$x_1 = C_1x_{11} + C_2x_{12}, \quad x_2 = C_1x_{21} + C_2x_{22},$$

c'est-à-dire

$$x_1 = e^{4t}\,(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \; x_2 = e^{4t}\,(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t).$$

686. Trouver la solution générale du système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1 - \lambda)\,(1 + \lambda^2) = 0.$$

Les nombres caractéristiques sont: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.

Pour $\lambda = 1$, afin de déterminer le vecteur propre, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -p_3 = 0, \\ p_1 - p_2 = 0, \\ p_1 - p_2 - p_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système définit le vecteur propre (1; 1; 0).

Pour $\lambda = i$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} (1-i)\,p_1 - p_3 = 0, \\ p_1 - ip_2 = 0, \\ p_1 - p_2 - ip_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système définit le vecteur propre $(1;\ -i;\ 1-i)$.

Le vecteur propre correspondant au nombre caractéristique $\lambda = -i$ ne sera pas examiné.

A la valeur $\lambda = 1$ correspondent les solutions

$$x_{11} = e^t, \quad x_{21} = e^t, \quad x_{31} = 0.$$

A la valeur $\lambda = i$ correspondent les solutions

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad -ie^{it} = -\sin t + i \cos t,$$
$$(1-i)\,e^{it} = (\cos t + \sin t) + i\,(\sin t - \cos t).$$

En séparant les parties réelles, on obtient les solutions

$$x_{12} = \cos t, \quad x_{22} = -\sin t, \quad x_{32} = \cos t + \sin t.$$

En séparant les parties imaginaires, on trouve les solutions

$$x_{13} = \sin t, \quad x_{23} = \cos t, \quad x_{33} = \sin t - \cos t.$$

La solution générale est

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t,$$
$$x_2 = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,$$
$$x_3 = C_2\,(\cos t + \sin t) + C_3\,(\sin t - \cos t).$$

687. Trouver la solution générale du système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

S o l u t i o n. Résolvons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

en explicitant, on trouve $(5-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$, ou $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. Par conséquent, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.

Si λ_1 est une racine de l'équation caractéristique d'ordre de multiplicité m, alors, à cette racine il correspond la solution

$$x_1 = p_1(t)\,e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = p_2(t)\,e^{\lambda_1 t}, \ \ldots, \ x_n = p_n(t)\,e^{\lambda_1 t},$$

où $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_n(t)$ sont des polynômes de degré non supérieur à $m-1$.

Donc, à la racine double $\lambda = 4$ il correspond la solution

$$x_1 = e^{4t}(a_1 t + a_2), \quad x_2 = e^{4t}(b_1 t + b_2).$$

Dérivons x_1 et x_2:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 e^{4t} + 4(a_1 t + a_2)e^{4t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = b_1 e^{4t} + 4(b_1 t + b_2)e^{4t}.$$

Substituons les valeurs de x_1, x_2, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ dans le système d'équations. En simplifiant par e^{4t}, on obtient

$$a_1 + 4(a_1 t + a_2) = 5(a_1 t + a_2) - (b_1 t + b_2),$$
$$b_1 + 4(b_1 t + b_2) = a_1 t + a_2 + 3(b_1 t + b_2).$$

En égalant les coefficients de t entre eux et les termes constants entre eux, on obtient les systèmes d'équations:

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases}$$

D'où il vient

$$a_1 = b_1; \quad a_2 - b_2 = a_1 = b_1.$$

En posant $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$ (C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires), on obtient $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2 - C_1$. Par conséquent,

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1).$$

Ce système peut être résolu d'une manière plus simple en appliquant la méthode d'élimination. En effet, on exprime x_2 à partir de la première équation, on dérive l'expression trouvée et l'on substitue ensuite les valeurs de x_2 et $\frac{dx_2}{dt}$ dans la seconde équation. Par suite, on obtient une équation linéaire homogène du second ordre par rapport à x_1. On recommande au lecteur de résoudre le système donné par la méthode d'élimination.

688. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -ax_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_1. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at}$, $x_2 = C_2 e^{-at} - C_1 e^{at}$.

689. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$,
$x_2 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t}$,
$x_3 = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$.

690. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$, $x_2 = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$.

691. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$,
$x_2 = C_1e^{t} - 3C_3e^{-t}$,
$x_3 = C_1e^{t} + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$.

692. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = e^{12t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t)$,
$x_2 = e^{12t}(-C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t)$.

693. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Réponse. $x_1 = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t$,
$x_2 = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t$.

694. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3. \end{cases}$$

Réponse.

$$x_1 = 2C_1e^{-t} + 2(4C_3 + C_2)\cos t - 2(4C_2 - C_3)\sin t,$$
$$x_2 = -2C_1e^{-t} + 3(5C_2 + 3C_3)\cos t + 3(5C_3 - 3C_2)\sin t,$$
$$x_3 = C_1e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)\sin t.$$

695. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a+1)x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + (a-1)y. \end{cases}$$

Réponse. $x = e^{at}(C_1t + C_2)$, $y = e^{at}(C_1t + C_2 - C_1)$.

696. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Réponse. $x = -2e^t(C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t)$,
$y = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.

697. Trouver la solution générale du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$$

Réponse. $x = e^t(C_1t + C_2)$, $y = e^t(C_1 - 2C_2 - 2C_1t)$.

CHAPITRE V

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES PROBABILITÉS

§ 1. Evénement aléatoire. Fréquence et probabilité d'un événement aléatoire

On appelle *événement aléatoire* un événement qui peut arriver ou peut ne pas arriver en présence d'un ensemble de conditions liées à la possibilité de réalisation de l'événement considéré.

Les événements aléatoires sont désignés par les lettres A, B, C, . . . Chaque fois que la présence de l'ensemble de conditions susmentionné est assurée, on dit que l'on assiste à une épreuve. Le nombre des épreuves peut augmenter indéfiniment. Le rapport du nombre m d'arrivées de l'événement aléatoire A considéré dans une série d'épreuves donnée au nombre total d'épreuves n de cette série est appelé *fréquence de réalisation de l'événement A* dans la série d'épreuves examinée, ou tout simplement fréquence de l'événement A que l'on désigne par $\overline{P}(A)$.

Ainsi, l'on a $\overline{P}(A) = \frac{m}{n}$.

La fréquence d'un événement aléatoire est toujours comprise entre zéro et un:

$$0 \leqslant \overline{P}(A) \leqslant 1.$$

Les événements aléatoires qui peuvent être réalisés en différentes séries d'épreuves homogènes (à condition que le nombre d'épreuves dans chaque série soit suffisamment grand) jouissent de la s t a b i l i t é de leur fréquence, ce qui signifie que la fréquence de tel ou tel événement aléatoire varie très peu d'une série d'épreuves à l'autre.

C'est justement ce fait qui nous permet d'appliquer les méthodes mathématiques à l'étude des événements aléatoires en assignant à chacun d'eux sa *probabilité* représentée par le nombre (qui, généralement parlant, n'est pas connu d'avance) autour duquel oscille la fréquence observée de l'événement.

La probabilité d'un événement aléatoire A se note $P(A)$. La probabilité, de même que la fréquence d'un événement aléatoire, se situe entre zéro et un: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

A un événement *certain* (c'est-à-dire à un événement qui doit arriver à la suite de chaque épreuve) on assigne la probabilité $P(A) = 1$.

A un événement *impossible* (c'est-à-dire à un événement qui ne peut arriver à la suite d'aucune épreuve) on assigne la probabilité $P(A) = 0$.

Dans les cas les plus simples, la probabilité d'un événement aléatoire peut être déterminée à l'avance (a priori).

Cela peut se faire si, par exemple, les résultats possibles de chaque épreuve d'une série d'épreuves homogènes sont représentés par n (les seuls possibles) constituants (cas) incompatibles entre eux et équiprobables (cela signifie que ces n constituants excluent la possibilité de réalisation de tout autre résultat, que deux de ces constituants ne peuvent pas arriver en même temps et que la réalisation d'un constituant n'est point plus favorisée que la réalisation d'un

autre). Si parmi ces n cas uniquement possibles, incompatibles entre eux et équiprobables m cas sont favorables à l'événement A, la probabilité de cet événement est donnée par le rapport de m à n: $P(A) = \frac{m}{n}$.

698. Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. On tire au hasard une boule de cette urne. Quelle est la probabilité que le numéro de la boule tirée ne soit pas supérieur à 10?

Solution. Etant donné que le numéro de n'importe quelle boule se trouvant dans l'urne ne dépasse pas le chiffre 10, le nombre de cas favorisant l'événement est égal au nombre de tous les cas possibles, c'est-à-dire $m = n = 10$ et $P(A) = 1$. Dans ce cas, il s'agit d'un événement certain.

699. Une urne contient 15 boules dont 5 blanches et 10 noires. Quelle est la probabilité de tirer de cette urne une boule bleue?

Solution. Dans l'urne il n'y a pas de boules bleues, c'est-à-dire $m = 0$, alors que $n = 15$. Par conséquent, $P(A) = \frac{0}{15} = 0$. Il s'agit donc d'un événement impossible.

700. Une urne contient 12 boules: 3 blanches, 4 noires et 5 rouges. Quelle est la probabilité que la boule tirée de l'urne soit noire?

Solution. Ici, $m = 4$, $n = 12$, donc $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

701. Une urne contient 10 boules: 6 blanches et 4 noires. On tire deux boules. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches?

Solution. Ici, le nombre de cas possibles $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$. Le nombre de cas favorables à l'événement A est donné par l'égalité $m = C_6^2$, c'est-à-dire $m = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Donc, $P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

702. On met en vente 2000 billets de loterie qui peuvent rapporter les gains suivants: 1 billet, 100 roubles; 4 billets, 50 roubles chacun; 10 billets, 20 roubles chacun; 20 billets, 10 roubles chacun; 165 billets, 5 roubles chacun; 400 billets, 1 rouble chacun; les autres billets sont vides. Quelle est la probabilité de tirer un billet qui rapporte un gain d'au moins 10 roubles?

Solution. Ici $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$, donc $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{35}{2000} = 0{,}0175$.

703. Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. Quelle est la probabilité de tirer de l'urne la boule n° 37?

Réponse. $P(A) = 0$ (événement impossible).

704. On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Quelle est la probabilité que l'on tirera face deux fois?

Réponse. $\frac{1}{4}$.

705. Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. Une autre contient le même nombre de boules qui portent les numéros de 6 à 10. On tire une boule de chaque urne.

Quelle est la probabilité :

a) que la somme des numéros tirés ne soit pas inférieure à 7?

b) que la somme des numéros tirés soit égale à 11?

c) que la somme des numéros tirés ne soit pas supérieure à 11?

Réponse. a) 1 ; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{3}{5}$.

706. Une loterie comporte 1000 billets dont 500 gagnants et 500 vides. On en achète deux. Quelle est la probabilité que tous les deux billets soient gagnants?

Réponse. $\frac{499}{1998}$.

707. Les élèves d'un groupe de 30 personnes ont reçu en composition les notes suivantes : 6 élèves, très bien ; 10 élèves, bien ; 9 élèves, passable. Quelle est la probabilité que tous les trois élèves invités au tableau noir aient reçu une mauvaise note?

Réponse. $\frac{1}{406}$.

§ 2. Axiome de l'addition des probabilités et axiome des probabilités composées

On appelle *réunion* (ou *somme*) de plusieurs événements aléatoires un événement consistant en la réalisation d'au moins un des événements donnés. La réunion des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est désignée par

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Si les événements réunis sont incompatibles (c'est-à-dire que deux de ces événements ne peuvent pas être réalisés simultanément), la *probabilité de la réunion de plusieurs événements est égale à la somme des probabilités des événements réunis* (axiome de l'addition des probabilités) :

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

L'événement consistant en la non-arrivée d'un événement aléatoire A est appelé *événement contraire de l'événement A* et se note $\overline{A}$. La réunion des événements A et $\overline{A}$ donne un événement certain et, vu que les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles, on a

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \quad \text{ou} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Si une épreuve donnée peut avoir comme résultat un seul des événements incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on dit que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un ensemble d'événements appelé *espace des événements de l'épreuve.* Etant donné que la réunion des événements de l'espace des événements d'une épreuve constitue un événement certain, on peut écrire

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

On appelle *produit* de deux événements aléatoires A_1 et A_2 un événement composé consistant en la réalisation simultanée ou successive de ces deux événements. Le produit des événements A_1 et A_2 est désigné par $A_1 \cdot A_2$.

La probabilité qu'un événement aléatoire A_2 se réalise sachant qu'un autre événement A_1 est réalisé constitue la *probabilité conditionnelle* de l'événement A_2 par rapport à l'événement A_1 et se note $P(A_2/A_1)$.

La probabilité que deux événements A_1 et A_2 se produisent en même temps est égale au produit de la probabilité de l'un d'eux par la probabilité conditionnelle de l'autre événement par rapport au premier (axiome des probabilités composées):

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1/A_2).$$

Deux événements aléatoires A_1 et A_2 sont appelés *indépendants* si la probabilité conditionnelle de l'un d'eux par rapport à l'autre est égale à la probabilité inconditionnée de celui-là:

$$P(A_2/A_1) = P(A_2).$$

Cette assertion vérifie les égalités ci-dessous:

$$P(A_2/\bar{A}_1) = P(A_2/A_1) = P(A_2);$$
$$P(A_1/A_2) = P(A_1/\bar{A}_2) = P(A_1).$$

Pour des événements indépendants, la probabilité qu'ils se réalisent en même temps est égale au produit de leurs probabilités:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

La réalisation simultanée de n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (remarquons qu'elle est déterminée d'une façon analogue) est désignée par $A_1 A_2 \ldots A_n$.

La probabilité conditionnelle d'un événement A_k déterminée en supposant que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ sont réalisés se note $P(A_k/A_1 A_2 \ldots A_{k-1})$. D'après l'axiome des probabilités composées, la probabilité que n événements se réalisent simultanément est déterminée par la formule

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \ldots P(A_n/A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont *indépendants dans leur ensemble* si la probabilité de réalisation de chacun d'eux n'est influencée par la réalisation des autres pris en n'importe quelle combinaison.

La probabilité de réalisation simultanée de n événements indépendants dans leur ensemble est égale au produit des probabilités de ces événements:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

708. Une urne contient 10 boules blanches, 15 boules noires, 20 boules vertes et 25 boules rouges. On tire une boule. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit: blanche? noire? verte? rouge? blanche ou noire? verte ou rouge? blanche, noire ou verte?

Solution. On a

$$n = 10 + 15 + 20 + 25 = 70, \quad P(\mathrm{B}) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}, \quad P(\mathrm{N}) = \frac{15}{70} = \frac{3}{14},$$
$$P(\mathrm{V}) = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}, \quad P(\mathrm{R}) = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}.$$

En appliquant l'axiome de l'addition des probabilités, on obtient:

$$P(\mathrm{B} + \mathrm{N}) = P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{N}) = \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14};$$
$$P(\mathrm{V} + \mathrm{R}) = P(\mathrm{V}) + P(\mathrm{R}) = \frac{2}{7} + \frac{5}{14} = \frac{9}{14};$$
$$P(\mathrm{B} + \mathrm{N} + \mathrm{V}) = 1 - P(\mathrm{R}) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

709. Une urne contient 2 boules blanches et 10 noires. Dans une autre urne on a 8 boules blanches et 4 noires. On tire une boule de chaque urne. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches?

Solution. Dans ce cas, il s'agit de la réalisation simultanée (ou, comme l'on dit, du produit) des événements A et B, où l'événement A consiste en l'apparition d'une boule blanche tirée de la première urne, alors que l'événement B signifie le tirage d'une boule blanche de la seconde urne, A et B étant des événements indépendants. On a:

$$P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

L'axiome des probabilités composées donne:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}.$$

710. Les conditions du problème précédent restant les mêmes, trouver la probabilité du tirage d'une boule blanche et d'une boule noire.

Solution. Adoptons les notations suivantes:

Evénement A — tirage d'une boule blanche de la première urne;

Evénement B — tirage d'une boule blanche de la seconde urne;

Evénement C — tirage d'une boule noire de la première urne ($C=\overline{A}$);

Evénement D — tirage d'une boule noire de la seconde urne ($D=\overline{B}$);

$$P(A)=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{2}{3},\quad P(C)=P(\overline{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

$$P(D)=P(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Trouvons la probabilité du tirage d'une boule blanche de la première urne et d'une boule noire de la seconde:

$$P(AD)=P(A)\cdot P(D)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}.$$

Trouvons la probabilité du tirage d'une boule noire de la première urne et d'une boule blanche de la seconde:

$$P(BC)=P(B)\cdot P(C)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{9}.$$

Déterminons maintenant la probabilité que la boule tirée de n'importe quelle urne sera blanche, alors que celle tirée de l'autre urne sera noire. En appliquant l'axiome de l'addition des probabi-

lités, on trouve :

$$P = P(AD) + P(BC) = \frac{1}{18} + \frac{5}{9} = \frac{11}{18}.$$

711. Une urne contient 6 boules blanches et 8 noires. On tire deux boules (la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne). Trouver la probabilité du tirage de deux boules blanches.

Solution. L'événement A consiste en l'apparition d'une boule blanche lors du premier tirage ; l'événement B, en l'apparition d'une boule blanche lors du second tirage. Dans le cas des événements dépendants, l'axiome des probabilités composées donne : $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$. Mais

$P(A) = \frac{6}{6+8} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ (la probabilité d'apparition d'une boule blanche au premier tirage) ;

$P(B/A) = \frac{6-1}{6+8-1} = \frac{5}{13}$ (la probabilité d'apparition d'une boule blanche au second tirage, en admettant qu'une boule blanche ait été déjà tirée).

Par conséquent, $P(AB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$.

712. Trois tireurs tirent au but. Les probabilités d'un coup réussi sont respectivement égales à 0,75, 0,80 et 0,90. Dire quelle est la probabilité pour que tous les trois tireurs atteignent le but simultanément.

Solution. On a

$$P(A) = 0{,}75, \quad P(B) = 0{,}8, \quad P(C) = 0{,}9;$$

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

713. Dans les conditions du problème précédent, trouver la probabilité pour qu'au moins un tireur atteigne le but.

Solution. $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ (la probabilité du premier tireur de manquer le but) ; $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$ (la probabilité du deuxième tireur de manquer le but) ; $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$ (la probabilité du troisième tireur de rater son coup) ; alors $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, qui représente la probabilité pour que tous les trois tireurs manquent le but simultanément, sera déterminée comme suit :

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}005.$$

Etant donné que l'événement contraire de l'événement $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ consiste en un coup réussi réalisé par au moins un tireur, la probabilité cherchée sera trouvée par la formule

$$P = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}), \text{ c'est-à-dire } P = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

714. La probabilité pour qu'une machine-outil tombe en panne durant un poste de travail est égale à α (c'est un nombre positif assez petit pour que l'on puisse négliger ses puissances 2, 3, etc.). Quelle est la probabilité pour que durant 5 jours la machine-outil ne tombe pas en panne? Pour résoudre le problème, poser $\alpha = 0{,}01$.

Solution. Vu que $1 - \alpha$ représente la probabilité du fait que la machine-outil ne tombe pas en panne durant le poste de travail, l'axiome des probabilités composées nous permet d'affirmer que $(1 - \alpha)^5$ sera la probabilité pour que la machine-outil ne tombe pas en panne durant 5 jours.

Le développement binomial aboutit, si l'on néglige les termes contenant α^2, α^3, α^4 et α^5 à l'égalité approchée suivante : $(1 - \alpha)^5 \simeq \simeq 1 - 5\alpha$, c'est-à-dire $P \simeq 1 - 5\alpha$. En posant $\alpha = 0{,}01$, on obtient $P \simeq 0{,}95$.

715. Une urne contient a boules blanches et b noires. Quelle est la probabilité de tirer deux boules dont une soit blanche et l'autre noire, si la boule extraite n'est pas remise dans l'urne?

Solution.

Evénement A — apparition d'une boule blanche lors du premier tirage;

Evénement B — apparition d'une boule noire lors du second tirage;

Evénement C — apparition d'une boule noire lors du premier tirage;

Evénement D — apparition d'une boule blanche lors du second tirage.

Calculons la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche et la seconde, noire:

$$P_1 = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Trouvons la probabilité du tirage d'abord d'une boule noire, ensuite d'une boule blanche:

$$P_2 = P(C) \cdot P(D/C) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

De cette façon, en utilisant l'axiome de l'addition des probabilités, on trouve la probabilité pour que des deux boules tirées l'une soit blanche et l'autre, noire:

$$P = P_1 + P_2, \text{ c'est-à;dire } P = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

716. Une urne contient a boules blanches, b noires et c bleues. On tire une boule. Calculer la probabilité du tirage d'une boule: 1) blanche; 2) noire; 3) bleue; 4) blanche ou noire; 5) blanche ou bleue; 6) noire ou bleue.

Réponse. 1) $\frac{a}{a+b+c}$; 2) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{c}{a+b+c}$;

4) $\frac{a+b}{a+b+c}$; 5) $\frac{a+c}{a+b+c}$; 6) $\frac{b+c}{a+b+c}$.

717. Une urne contient a boules blanches et b noires. Dans une autre urne on trouve c boules blanches et d noires. On tire une boule de chaque urne. Quelle est la probabilité pour que les deux boules soient noires?

Réponse. $\frac{bd}{(a+b)(c+d)}$.

718. Deux tireurs ouvrent le feu simultanément. La probabilité d'un coup au but du premier tireur est égale à p_1; celle du second tireur, p_2. Quelle est la probabilité pour qu'un tireur atteigne le but, alors que l'autre le rate?

Réponse. $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$.

719. La probabilité pour que dans la ville méridionale N la température de n'importe quel jour du mois de juillet soit inférieure à 5 °C est égale à α (α est un nombre assez petit pour que l'on puisse négliger son carré et ses puissances d'ordre supérieur). Quelle est la probabilité pour que durant les premiers trois jours du mois de juillet la température ne soit pas inférieure à 5 °C?

Réponse. $1 - 3\alpha$.

720. Une urne contient 6 boules: 1 blanche, 2 rouges et 3 bleues. Une autre renferme 12 boules: 2 blanches, 6 rouges et 4 bleues. On tire une boule de chaque urne. Quelle est la probabilité de ne pas tirer une boule bleue?

Réponse. $\frac{1}{3}$.

721. La probabilité pour que durant la journée une machine-outil soit mise hors fonctionnement est égale à 0,03. Quelle est la probabilité pour que pendant quatre jours de suite la machine-outil fonctionne sans panne?

Réponse. $\simeq 0{,}88$.

722. L'effectif d'une classe est constitué par 12 garçons et 18 filles. On demande d'élire une délégation de deux personnes. Si le choix est aléatoire, dire quelle est la probabilité du choix:

1) de deux garçons?; 2) de deux filles?; 3) d'une fille et d'un garçon?

Réponse. 1) $\frac{22}{145}$; 2) $\frac{51}{145}$; 3) $\frac{72}{145}$.

723. Une urne contient 9 boules blanches et 1 boule noire. On tire simultanément trois boules. Quelle est la probabilité pour que toutes les trois boules tirées soient blanches?

Réponse. 0,7.

724. On tire trois coups à une même cible. Chaque fois, la probabilité d'atteindre le but est égale à 0,5. Trouver la probabilité d'avoir un seul coup au but à la suite de ces trois coups tirés.

Réponse. 0,375.

§ 3. Répétition des épreuves

Si l'on effectue n épreuves indépendantes et si la probabilité de réalisation d'un événement A dans chacune de ces épreuves reste invariable et est égale à p, alors la probabilité d'apparition m fois de l'événement A dans ces n épreuves est donnée par la formule

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

(*formule de Bernoulli*), où $q = 1 - p$.

De cette façon,

$$P_{0,n} = q^n, \quad P_{1,n} = npq^{n-1}, \quad P_{2,n} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} p^2 \cdot q^{n-2}, \ \ldots, \ P_{n,n} = p^n.$$

725. Une urne contient 30 boules : 20 blanches et 10 noires. On tire quatre boules de suite (avant de procéder au tirage suivant, la boule tirée est remise dans l'urne et on brasse les boules). Quelle est la probabilité pour que deux des quatre boules tirées soient blanches?

Solution. La probabilité de tirer une boule blanche peut être considérée invariable pour toutes les quatre épreuves et égale à $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$; $q = 1 - p = \frac{1}{3}$. En appliquant la formule donnée ci-avant, on obtient

$$P_{2,4} = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

726. La probabilité de la réalisation d'un événement A est égale à 0,4. Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé trois fois au plus en 10 épreuves?

Solution. Ici, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$.

La probabilité de l'apparition de l'événement A

$$0 \text{ fois}: \ P_{0,10} = q^{10}.$$

La probabilité de l'apparition de l'événement A

$$1 \text{ fois}: \ P_{1,10} = 10\, pq^9.$$

La probabilité de l'apparition de l'événement A

$$2 \text{ fois}: \ P_{2,10} = 45p^2q^8.$$

La probabilité de l'apparition de l'événement A

$$3 \text{ fois}: \ P_{3,10} = 120p^3q^7.$$

La probabilité de l'apparition de l'événement A trois fois au plus sera

$$P = P_{0,10} + P_{1,10} + P_{2,10} + P_{3,10},$$

c'est-à-dire

$$P = q^{10} + 10pq^9 + 45p^2q^8 + 120p^3q^7,$$

ou

$$P = q^7 \cdot (q^3 + 10q^2p + 45qp^2 + 120p^3).$$

En posant $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, on obtient

$P = 0{,}6^7 \cdot (0{,}216 + 1{,}44 + 4{,}32 + 7{,}68)$; c'est-à-dire $P \simeq 0{,}38$.

727. Trouver la probabilité d'avoir trois filles et deux garçons dans une famille de cinq enfants, la probabilité de la naissance d'une fille ou d'un garçon étant la même.

Solution. La probabilité de la naissance d'une fille $p = 0{,}5$; alors $q = 1 - p = 0{,}5$ (c'est la probabilité de la naissance d'un garçon). La probabilité cherchée est donnée par la formule

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^2 = \frac{5}{16}.$$

728. Dans les conditions du problème précédent, trouver la probabilité pour que parmi les enfants il y ait trois filles au plus.

Solution. On a

$$P_{0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}; \quad P_{1,5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32};$$

$$P_{2,5} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}; \quad P_{3,5} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16};$$

$$P = P_{0,5} + P_{1,5} + P_{2,5} + P_{3,5} = \frac{13}{16}.$$

729. On jette 8 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité de tirer face 6 fois?

Réponse. $\frac{7}{64}$.

730. On jette 6 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'amener face trois fois au plus?

Réponse. $\frac{21}{32}$.

731. L'effectif de 30 élèves d'une classe est constitué de 20 garçons et 10 filles. A chacune des trois questions posées par l'enseignant, la réponse est donnée par un autre élève. Quelle est la probabilité pour que parmi ces trois élèves il y ait deux garçons et une fille?

Réponse. $\frac{4}{9}$.

732. Dans chacune des quatre urnes on trouve 5 boules blanches et 15 boules noires. On tire une boule de chacune de ces urnes. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches et deux noires?

Réponse. $\frac{27}{128}$.

§ 4. Formule de la probabilité complète. Formule de Bayes

Si l'on sait qu'un événement A peut avoir lieu simultanément avec l'un des événements $H_1, H_2, \ldots, H_n$ qui forment un espace des événements incompatibles, alors l'événement A peut être présenté comme la réunion des événements $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$, c'est-à-dire $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. La probabilité de l'événement A peut être déterminée par la formule

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n),$$

ou

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

C'est la *formule de la probabilité complète.*

La probabilité conditionnelle de l'événement H_i, sachant que l'événement A est réalisé, est déterminée par l'ainsi appelée *formule de Bayes*:

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \cdot P(H_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les probabilités $P(H_i/A)$ calculées d'après la formule de Bayes sont souvent appelées *probabilités des hypothèses.*

733. Quatre urnes contiennent : la première, 1 boule blanche et 1 boule noire ; la deuxième, 2 boules blanches et 3 boules noires ; la troisième, 3 boules blanches et 5 boules noires ; la quatrième, 4 boules blanches et 7 boules noires. L'événement H_i consiste en le choix de la i-ième urne ($i = 1, 2, 3, 4$). On sait que la probabilité du choix de la i-ième urne est $\frac{i}{10}$, c'est-à-dire

$$P(H_1) = \frac{1}{10}, \quad P(H_2) = \frac{1}{5}, \quad P(H_3) = \frac{3}{10}, \quad P(H_4) = \frac{2}{5}.$$

On choisit au hasard une urne et l'on en tire une boule. Trouver la probabilité du tirage d'une boule blanche.

Solution. D'après les conditions du problème, on a $P(A/H_1) = \frac{1}{2}$ (la probabilité conditionnelle du tirage d'une boule blanche de la première urne) ; d'une façon analogue, on a

$$P(A/H_2) = \frac{2}{5}; \quad P(A/H_3) = \frac{3}{8}; \quad P(A/H_4) = \frac{4}{11}.$$

La probabilité du tirage d'une boule blanche est trouvée par la formule de la probabilité complète :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \\ + P(H_3) \cdot P(A/H_3) + P(H_4) \cdot P(A/H_4).$$

Donc,

$$P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{11}=\frac{1707}{4400}.$$

734. Trois urnes sont absolument identiques quant à leur aspect extérieur. La première contient 20 boules blanches; la deuxième, 10 boules blanches et 10 noires; la troisième, 20 boules noires. On choisit une urne au hasard et l'on en tire une boule blanche. Calculer la probabilité que la boule ait été tirée de la première urne.

Solution.

Hypothèse H_1: choix de la première urne.

Hypothèse H_2: choix de la deuxième urne.

Hypothèse H_3: choix de la troisième urne.

Evénement A : tirage d'une boule blanche.

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$ (le choix de n'importe quelle urne est équiprobable); $P(A/H_1)=1$ (probabilité du tirage d'une boule blanche de la première urne); $P(A/H_2)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ (probabilité du tirage d'une boule blanche de la deuxième urne); $P(A/H_3)=0$ (probabilité du tirage d'une boule blanche de la troisième urne).

La probabilité cherchée est trouvée par la formule de Bayes:

$$P(H_1/A)=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}.$$

735. Une urne contient N pièces dont quelques unes peuvent être rebutées. Une pièce tirée au hasard s'avère être saine. Déterminer la probabilité:

1) que toutes les pièces contenues dans l'urne soient saines;

2) que $N-1$ pièces soient saines et qu'une pièce soit rebutée;

3) que $N-2$ pièces soient saines et que deux pièces soient rebutées;

. . . . . .

$N+1$ que toutes les pièces soient rebutées.

Solution. Hypothèses faites avant l'épreuve:

H_0: toutes les pièces sont saines;

H_1: une pièce est rebutée;

H_2: deux pièces sont rebutées;

. . . . . .

H_N: toutes les pièces sont rebutées.

Evénement A : tirage d'une pièce saine.

On demande de trouver

$$P(H_0/A),\ P(H_1/A),\ P(H_2/A),\ \ldots,\ P(H_N/A).$$

Admettons qu'avant l'épreuve toutes les hypothèses soient équiprobables :

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = \ldots = P(H_N) = \frac{1}{N+1},$$

$$P(A/H_0) = 1,\ P(A/H_1) = \frac{N-1}{N},\ P(A/H_2) = \frac{N-2}{N},\ \ldots,$$

$$P(A/H_{N-1}) = \frac{1}{N},\ P(A/H_N) = 0.$$

On en tire :

$$P(H_0/A) = \frac{1\cdot\frac{1}{N+1}}{1\cdot\frac{1}{N+1} + \frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1} + 0\cdot\frac{1}{N+1}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \ldots + \frac{N-1}{N} + 1} = \frac{N}{1+2+\ldots+N-1+N} = \frac{2}{N+1}.$$

D'une façon analogue, on obtient :

$$P(H_1/A) = \frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N},$$

$$P(H_2/A) = \frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-2}{N},$$

$$P(H_3/A) = \frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-3}{N},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(H_N/A) = \frac{2}{N+1}\cdot 0 = 0.$$

736. On a deux urnes. La première contient 5 boules blanches et 10 noires. Dans la seconde il y a 3 boules blanches et 7 noires. On met dans la première urne une boule prise dans la seconde et l'on tire au hasard une boule de la première urne.

Déterminer la probabilité que la boule extraite soit blanche.

Solution. Après avoir mis dans la première urne une boule prise dans la seconde, la première urne contient deux collections de boules :

1) 5 boules blanches et 10 boules noires qui s'y trouvent dès le début ;

2) 1 boule provenant de la seconde urne.

La probabilité d'apparition d'une boule blanche tirée de la première collection est $P(A/H_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, alors que celle d'apparition d'une boule blanche appartenant à la seconde collection est $P(A/H_2) = \frac{3}{10}$.

D'autre part, la probabilité que la boule extraite au hasard appartienne

à la première collection est $P(H_1) = \frac{15}{16}$, et à la seconde, $P(H_2) = \frac{1}{16}$.

En appliquant la formule de la probabilité complète, on a

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{10} = \frac{53}{160}.$$

737. On a deux urnes. La première contient 1 boule blanche et 2 noires; la seconde renferme 100 boules blanches et 100 noires. On fait passer dans la première urne 1 boule prise dans la seconde, ensuite on tire au hasard 1 boule de la première urne.

Quelle est la probabilité que la boule extraite provienne de la seconde urne si l'on sait qu'elle est blanche?

Indication. Utiliser la formule de Bayes.

Réponse. $P(H_2/A) = \frac{1}{3}$.

§ 5. Variables aléatoires et lois de leur répartition

Si à chaque événement élémentaire A appartenant à un ensemble d'événements ω on peut mettre en correspondance une valeur déterminée $X = X(A)$, on dit que l'on donne une variable *aléatoire*. La variable aléatoire X peut être considérée comme une fonction de l'événement A, son domaine de définition étant l'ensemble ω.

La variable aléatoire peut prendre telle ou telle valeur d'un certain ensemble numérique, mais on ne peut pas dire à l'avance la valeur qu'elle prendra. D'habitude, les variables aléatoires sont désignées par des lettres majuscules $X, Y, \ldots$, alors que les valeurs qu'elles prennent sont notées par les minuscules correspondantes $x, y, \ldots$

Lorsque les valeurs que peut prendre la variable aléatoire donnée X forment une série numérique discrète * (finie ou infinie) $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, la valeur aléatoire X elle-même est dite *discrète*.

Mais si les valeurs que peut prendre la variable aléatoire donnée X occupent entièrement un intervalle fini ou infini (A, B) de l'axe numérique Ox, on dit que la variable aléatoire est *continue*.

A chaque valeur d'une variable aléatoire discrète du type x_n correspond une probabilité déterminée p_n; à chaque intervalle (a, b) appartenant au domaine de valeurs d'une variable aléatoire du type continu correspond également une probabilité déterminée $P(a < X < b)$ caractérisant le fait que la valeur prise par la variable aléatoire tombe dans cet intervalle.

La relation qui établit d'une façon ou d'une autre la liaison entre les valeurs possibles d'une variable aléatoire et leurs probabilités est appelée *loi de répartition* de la variable aléatoire.

La loi de répartition d'une variable aléatoire est donné habituellement par la série de répartition de la forme

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

* Une série finie ou infinie de nombres est dite *discrète* si à chaque nombre x_n de cette série on peut faire correspondre un intervalle (a_n, b_n) $(a_n < x_n < b_n)$ à l'intérieur duquel il n'y a plus de nombres appartenant à la série considérée.

où $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, le signe somme concernant l'ensemble (fini ou infini) entier des valeurs possibles de la variable aléatoire donnée X.

Il est commode de présenter la loi de répartition d'une variable aléatoire continue à l'aide de l'ainsi appelée *fonction densité de probabilité* $f(x)$. La probabilité $P(a < X < b)$ que la valeur prise par la variable aléatoire X tombe dans l'intervalle (a, b) est déterminée par l'égalité

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La courbe représentative de la fonction $f(x)$ est appelée *courbe de répartition*. Au point de vue géométrique, la probabilité que la variable aléatoire se situe

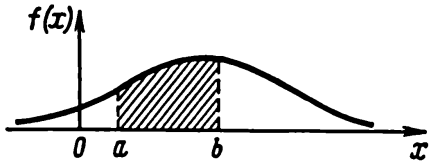

Fig. 33

dans l'intervalle (a, b) est égale à la surface du trapèze curviligne correspondant déterminé par la courbe de répartition, l'axe Ox et les droites $x = a$, $x = b$ (fig. 33).

La fonction densité de probabilité $f(x)$ jouit des propriétés suivantes:

$$1)\ f(x) \geqslant 0, \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

[si toutes les valeurs de la variable aléatoire X sont comprises dans l'intervalle (A, B), la dernière condition peut être remplacée par la condition $\int_A^B f(x)\,dx = 1$].

Examinons maintenant la fonction $F(x) = P(X < x)$. Cette fonction est appelée *fonction de répartition de la probabilité* de la variable aléatoire X. Elle existe aussi bien pour les variables aléatoires discrètes que pour celles continues. Si $f(x)$ représente la fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

De la dernière égalité il résulte

$$f(x) = F'(x).$$

Parfois, la fonction $f(x)$ est appelée *fonction différentielle de répartition de la probabilité*, alors que la fonction $F(x)$ est dite *fonction intégrale de répartition de la probabilité*.

Ci-dessous sont résumées les propriétés essentielles de la fonction de répartition de la probabilité:

1) $F(x)$ est une fonction non décroissante de sa variable indépendante;
2) $F(-\infty) = 0$;
3) $F(+\infty) = 1$.

738. On donne les probabilités des valeurs que peut prendre une variable aléatoire X :

10 avec la probabilité 0,3;
2 avec la probabilité 0,4;
8 avec la probabilité 0,1;
4 avec la probabilité 0,2.

Former la série de répartition de la variable aléatoire X.

Solution. En disposant les valeurs prises par la variable aléatoire en ordre croissant, on obtient la série de répartition suivante :

x_i	2	4	8	10
p_i	0,4	0,2	0,1	0,3

Prenons les points (2; 0,4), (4; 0,2) etc. dans le plan xOp. En joignant les points successifs par des segments linéaires, on obtient

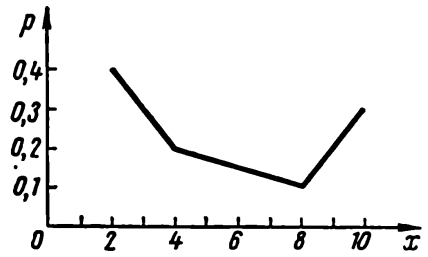

Fig. 34

l'ainsi appelé *polygone* de répartition de la variable aléatoire X (fig. 34).

739. Une variable aléatoire X est régie par une loi de répartition dont la fonction densité de probabilité est $f(x)$. Avec cela,

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0; \\ f(x) = a(3x - x^2) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3; \\ f(x) = 0 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

1) Trouver le coefficient a.

2) Construire la courbe représentative de la fonction densité de probabilité $y = f(x)$.

3) Calculer la probabilité de la variable aléatoire X de tomber dans l'intervalle (1, 2).

Solution. 1) Étant donné que toutes les valeurs prises par la variable aléatoire donnée se situent sur le segment [0, 3], on a

$$\int_0^3 a\,(3x - x^2)\,dx = 1, \text{ d'où}$$

$$a\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 1,\ a\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 1, \text{ c'est-à-dire } a = \frac{2}{9}.$$

2) Dans l'intervalle (0, 3), la courbe représentative de la fonction $f(x)$ est la parabole $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x$, alors qu'en dehors de cet intervalle c'est l'axe des abscisses lui-même (fig. 35).

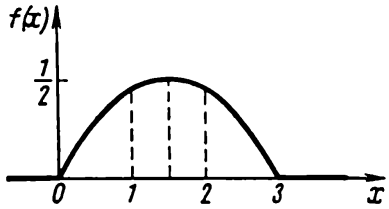

Fig. 35

3) La probabilité que les valeurs de la variable aléatoire X tombent dans l'intervalle (1, 2) est trouvée à partir de l'égalité

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27}.$$

740. On donne la série de répartition d'une variable aléatoire X :

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Construire la fonction de répartition de la probabilité de cette variable aléatoire.

S o l u t i o n. Si $x \leqslant 10$, alors $F(x) = P(X < x) = 0$;
si $10 < x \leqslant 20$, alors $F(x) = P(X < x) = 0{,}2$;
si $20 < x \leqslant 30$, alors $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;
si $30 < x \leqslant 40$, alors $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}35 = 0{,}85$;
si $40 < x \leqslant 50$, alors $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}1 = 0{,}95$;
si $x > 50$, alors $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}1 + 0{,}05 = 1$.

741. Une variable aléatoire X est donnée par la fonction de répartition (fonction intégrale)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<1; \\ \frac{x-1}{2}, & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 3; \\ 1, & \text{si } x>3. \end{cases}$$

Calculer la probabilité que la variable aléatoire X se situe dans les intervalles (1,5; 2,5) et (2,5; 3,5).

Solution. On a

$$P_1=F(2{,}5)-F(1{,}5)=\frac{2{,}5-1}{2}-\frac{1{,}5-1}{2}=0{,}75-0{,}25=0{,}5,$$

$$P_2=F(3{,}5)-F(2{,}5)=1-\frac{2{,}5-1}{1}=1-0{,}75=0{,}25.$$

742. Une variable aléatoire X est donnée par la fonction de répartition

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<2; \\ (x-2)^2 & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 3; \\ 1 & \text{si } x>3. \end{cases}$$

Calculer la probabilité que la variable aléatoire X tombe dans les intervalles (1; 2,5) et (2,5; 3,5).

Solution. On a

$$P_1 = F(2{,}5) - F(1) = (2{,}5-2)^2 - 0 = 0{,}25,$$

$$P_2 = F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - (2{,}5-2)^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

743. Une variable aléatoire X est donnée par la fonction de répartition figurant au problème précédent. Trouver la densité de répartition (la fonction différentielle de répartition de la probabilité) de la variable aléatoire.

Solution. La densité de répartition est donnée par la dérivée de la fonction de répartition, c'est-à-dire $f(x) = F'(x)$. Pour cette raison,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<2; \\ 2(x-2) & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 3; \\ 0 & \text{si } x>3. \end{cases}$$

744. Un tireur tire trois coups. La probabilité de toucher le but à chaque coup est 0,3. Former la série de répartition du nombre de coups réussis.

Indication. Utiliser la formule de Bernoulli.

Réponse.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

745. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules. Désignons par X la variable aléatoire qui représente la somme des numéros portés par les boules extraites. Former la série de répartition de la variable aléatoire X.

Réponse.

x_i	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

746. Une variable aléatoire X est régie par une loi de répartition dont la fonction densité de probabilité est $f(x)$. Avec cela,

$$f(x)=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ si } |x|<a;$$

$$f(x)=0 \text{ si } |x|\geqslant a.$$

1) Trouver le coefficient a.

2) Construire la courbe représentative de la fonction densité de probabilité.

3) Calculer la probabilité que les valeurs de la variable aléatoire X se situent dans l'intervalle $\left(\frac{a}{2}, a\right)$.

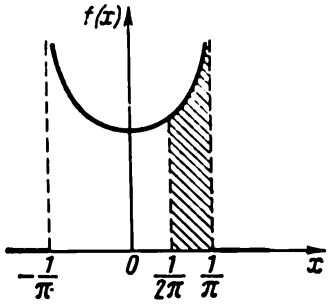

Fig. 36

Réponse. 1) $a=\frac{1}{\pi}$; 2) la courbe représentative est donnée par la figure 36; 3) $P\left(\frac{a}{2}<X<a\right)=\frac{1}{3}$.

747. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+\pi^2}$ représente la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X et calculer la probabilité pour que les valeurs de cette variable aléatoire tombent dans l'intervalle (π, ∞).

Réponse. $P(\pi < X < \infty) = \frac{1}{4}$.

748. On donne la fonction densité de probabilité qui détermine la répartition d'une variable aléatoire X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0; \\ a \sin x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0 \text{ si } x > \pi. \end{cases}$$

Déterminer a et $F(x)$.

Réponse. $a = \frac{1}{2}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 1 \text{ si } x > \pi. \end{cases}$$

749. Une urne contient 5 boules blanches et 25 boules noires. On tire une boule. Prenons le nombre de boules blanches extraites en tant que variable aléatoire X. Construire la fonction de répartition $F(x)$.

Réponse.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0; \\ \frac{5}{6} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1 \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

§ 6. Espérance mathématique d'une variable aléatoire. Dispersion

On appelle *espérance mathématique* d'une variable aléatoire discrète la somme des produits des valeurs de cette variable aléatoire par leurs probabilités.

Si une variable aléatoire X est caractérisée par une série de répartition finie

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	. . .	p_n

alors l'espérance mathématique $M(X)$ est déterminée par la formule

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n, \quad \text{ou } M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Etant donné que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, alors

$$M(X) = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

On voit de cette façon que $M(X)$ est la moyenne arithmétique pondérée des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable aléatoire pour les poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Si $n = \infty$, alors

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

(à condition que la somme de cette série soit finie).

La notion d'espérance mathématique se rapporte également à une variable aléatoire continue. Soit $f(x)$ la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. Alors, l'espérance mathématique de la variable aléatoire continue X est donnée par l'égalité

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

(à condition que la valeur de cette intégrale soit finie).

Géométriquement parlant, l'espérance mathématique aussi bien d'une variable aléatoire continue que d'une variable aléatoire discrète est égale à l'abscisse du centre de gravité de la surface comprise entre la courbe (ou le polygone) de répartition et l'axe des abscisses. C'est pourquoi dans le cas où la courbe (le polygone) de répartition est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées, l'espérance mathématique se confond avec l'abscisse du point d'intersection de cet axe de symétrie avec l'axe des abscisses.

Le point de l'axe Ox dont l'abscisse est égale à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire est souvent appelé *centre de répartition* de cette variable aléatoire.

On appelle *dispersion* d'une variable aléatoire l'espérance mathématique du carré de l'écart de cette variable aléatoire par rapport à son espérance mathématique:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

La dispersion montre de quelle façon les valeurs de la variable aléatoire sont rassemblées ou étalées autour de l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

En désignant $M(X)$ par m, on obtient les formules suivantes permettant de calculer la dispersion:

a) pour une variable aléatoire discrète X:

$$\begin{cases} D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2, \\ D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - m)^2 \text{ (pour } n = \infty); \end{cases}$$

b) pour une variable aléatoire continue X:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \cdot f(x)\, dx$$

Pour la dispersion d'une variable aléatoire, la formule ci-dessous est valable:

$$D(X)=M[(X-a)^2]-[M(X)-a]^2=M[(X-a)^2]-(m-a)^2.$$

Ici, a est un nombre arbitraire. Les calculs effectués à l'aide de cette dernière formule sont plus simples par rapport à ceux qui résultent de l'application des formules a) et b) et, pour cette raison, on l'utilise souvent dans le but de trouver la dispersion d'une variable aléatoire.

La grandeur $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$ est appelée *écart quadratique moyen* ou *écart type* de la variable aléatoire X.

750. On donne la fonction

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0; \\ \frac{1}{2}\sin x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\pi; \\ 0 & \text{si } x>\pi. \end{cases}$$

Montrer que $f(x)$ peut constituer la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X. Trouver l'espérance mathématique et la dispersion de la variable aléatoire X.

Solution. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=1.$$

En outre, $f(x)\geqslant 0$. Par conséquent, $f(x)$ peut représenter la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire. Vu que la droite

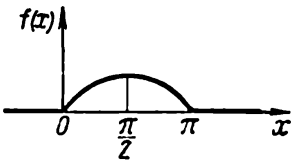

Fig. 37

$x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de l'arc correspondant de la courbe $y=\frac{1}{2}\sin x$ (fig. 37), l'espérance mathématique de la variable aléatoire X sera $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $M(X)=\frac{\pi}{2}$.

Trouvons maintenant la dispersion. A cette fin, posons dans la formule

$$D(X)=M[(X-a)^2]-[M(X)-a]^2$$

$a=0$, $M(X)=\frac{\pi}{2}$; il ne nous reste qu'à calculer l'intégrale qui détermine $M(X^2)$:

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}(\pi^2-4).$$

C'est pourquoi

$$D(X)=\frac{1}{2}(\pi^2-4)-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}-2,\quad \sigma_x=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\approx 0{,}69.$$

751. Une variable aléatoire X est caractérisée par la série de répartition ci-dessous:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Déterminer l'espérance mathématique et la dispersion.

Solution. On trouve l'espérance mathématique:

$$M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}08+4\cdot 0{,}02=1{,}32.$$

La dispersion sera trouvée par la formule $D(X)=M[(X-a)^2]-[M(X)-a]^2$, en posant $a=2$; d'où $M(X)-a=1{,}32-2=-0{,}68$.

On forme le tableau:

x_i	0	1	2	3	4
x_i-a	-2	-1	0	1	2
$(x_i-a)^2$	4	1	0	1	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02
$p_i(x_i-a)^2$	0,8	0,4	0	0,08	0,08

et l'on trouve

$$M[(X-a)^2]=\sum_{i=0}^{4} p_i(x_i-a)^2=1{,}36,$$

$$D(X)=1{,}36-(-0{,}68)^2=1{,}36-0{,}4634=0{,}8966.$$

Ainsi donc, la dispersion $D(X)=0{,}8966$, d'où $\sigma_x=\sqrt{0{,}8966}=0{,}95$.

752. Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire 5 boules de suite, chaque boule tirée étant remise dans l'urne avant de brasser les boules restantes et de procéder au tirage suivant.

En prenant le nombre des boules blanches extraites en tant que variable aléatoire X, former la loi de répartition des valeurs de X et déterminer son espérance mathématique et sa dispersion.

Réponse.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

$$M(X) = 3{,}00; \quad D(X) = 1{,}20.$$

753. On donne la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ \lambda(4x - x^3) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Quelle doit être la valeur de λ pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité de la variable aléatoire X? Déterminer la valeur de λ; trouver l'espérance mathématique et l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire correspondante X.

Réponse. $\lambda = \frac{1}{4}$; $M(X) = \frac{16}{15}$;

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{44}{225}} = 0{,}44.$$

§ 7. Mode et médiane

On appelle *mode d'une variable aléatoire discrète* X sa valeur la plus probable.

Le *mode d'une variable aléatoire continue* X est donné par sa valeur pour laquelle la densité de probabilité atteint son maximum.

Le mode sera désigné par le symbole $\overline{M}$.

On appelle *médiane* d'une variable aléatoire continue X une valeur μ de celle-

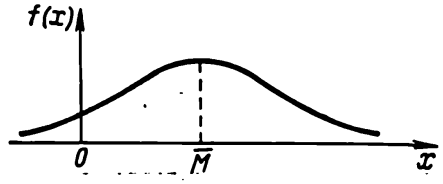

Fig. 38

ci pour laquelle les valeurs prises par la variable aléatoire ont autant de chance d'être inférieures que d'être supérieures à μ, c'est-à-dire

$$P(X < \mu) = P(X > \mu) = 0{,}5.$$

Au point de vue géométrique, le mode est donné par l'abscisse du point de la courbe (du polygone) de répartition dont l'ordonnée est maximum. La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point d'abscisse $x = \mu$ divise en deux parties égales la surface limitée par la courbe de répartition. Si la droite $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe de répartition $y = f(x)$, alors $\overline{M} = \mu = M(X) = a$ (fig. 38).

754. On donne la densité de probabilité $f(x) = a \cdot e^{2x-x^2}$ $(a > 0)$ d'une variable aléatoire. Trouver le mode de cette variable aléatoire.

Solution. On trouve le maximum de la fonction $y = f(x)$. Pour ce faire, on trouve d'abord les dérivées première et seconde :

$$f'(x) = 2a(1-x)e^{2x-x^2},$$

$$f''(x) = -2ae^{2x-x^2} + 4a(1-x)^2 e^{2x-x^2}.$$

De l'équation $f'(x) = 0$ on tire $x = 1$. Etant donné que $f''(1) = -2ae < 0$, la fonction $f(x)$ présente un maximum pour $x = 1$, c'est-à-dire $\overline{M} = 1$. La valeur de la constante a n'a pas été calculée, car le maximum de la fonction $f(x) = ae^{2x-x^2}$ ne dépend pas de la valeur numérique de a.

755. On donne la densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ x - \frac{1}{4}x^3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

d'une variable aléatoire X. Trouver la médiane de cette variable aléatoire.

Solution. La médiane μ doit être trouvée à partir de la condition $P(X < \mu) = 0{,}5$. Dans notre cas,

$$P(X < \mu) = \int_0^{\mu} \left(x - \frac{1}{4}x^3\right) dx = \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{16}.$$

On arrive ainsi à l'équation $\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{16} = 0{,}5$, ou bien $\mu^4 - 8\mu^2 + 8 = 0$, d'où $\mu = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{8}}$. Parmi les quatre racines de cette équation, il faut choisir celle qui se situe entre 0 et 2. Ainsi, $\mu = \sqrt{4 - \sqrt{8}} \approx 1{,}09$.

756. On donne la série de répartition d'une variable aléatoire :

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

Trouver le mode.

Réponse. $\overline{M} = 20$.

757. On donne la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2; \\ a(x-2)(4-x) & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 4; \\ 0 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Déterminer a, le mode et la médiane.

Réponse. $\overline{M} = \mu = 3$; $a = 0{,}75$.

§ 8. Répartition de densité uniforme

On appelle *uniforme* la répartition des variables aléatoires telles que toutes

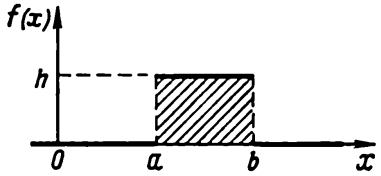

Fig. 39

leurs valeurs se situent sur un certain segment $[a, b]$ sur lequel leur densité de probabilité reste inchangée (fig. 39).

De cette façon,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a; \\ h & \text{si } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Etant donné que $h(b-a) = 1$, on a $h = \dfrac{1}{b-a}$ et, par conséquent,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a; \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

758. Déterminer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire dont la répartition est uniforme.

Solution. On a

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2},$$

ou

$$M(X) = \frac{a+b}{2},$$

ce qui est normal en vertu de la symétrie de répartition.

759. Calculer la dispersion et l'écart quadratique moyen d'une variable aléatoire de répartition uniforme.

Solution. Utilisons à nouveau la formule $D(X) = M[(X-a)^2] - [M(X)-a]^2$, en posant $a = 0$ et compte tenu du résultat du problème précédent : $M(X) = \frac{a+b}{2}$.

Ainsi, il nous reste à calculer $M[X^2]$; on a

$$M(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{3(b-a)}x^3\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

D'où

$$D(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Par conséquent,

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

760. Toutes les valeurs prises par une variable aléatoire uniformément répartie se situent sur le segment [2, 8]. Trouver la probabilité pour que les valeurs prises par la variable aléatoire tombent dans l'intervalle (3, 5).

Réponse. $P(3 < X < 5) = (5-3)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

761. L'intervalle de mouvement des trams sur une ligne donnée est égal à 5 mn. A un certain moment, un voyageur arrive à l'arrêt. Quelle est la probabilité pour que ce voyageur arrive à l'arrêt pas avant une minute après le départ du tram, mais pas plus tard de deux minutes qui précèdent le départ du tram suivant?

Réponse. $\frac{2}{5}$.

§ 9. Loi de répartition binomiale. Loi de Poisson

Si la probabilité d'arrivée d'un événement aléatoire à la suite de chaque épreuve est p, on sait que la probabilité de la réalisation de cet événement m fois en n épreuves est donnée par la formule de Bernoulli :

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \text{ (où } q = 1-p).$$

La loi de répartition d'une variable aléatoire X, qui peut prendre $n+1$ valeurs $(0, 1, \ldots, n)$, décrite par la formule de Bernoulli est appelée loi *binomiale*.

La loi de répartition d'une variable aléatoire X, qui peut prendre toute valeur entière $(0, 1, 2, \ldots, n)$, décrite par la formule

$$P(X=m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

est appelée *loi de Poisson*.

La loi de Poisson représente la loi de répartition de probabilité des variables aléatoires suivantes:

a) Admettons que dans l'intervalle $(0, N)$ de l'axe Ox se situent n points et que les événements consistant en la disposition d'un point sur tout segment de longueur fixée (par exemple, de longueur égale à l'unité) donné à l'avance soient équiprobables.

Si $N \to \infty$, $n \to \infty$ et $a = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{n}{N}$, alors la variable aléatoire X, qui est égale au nombre de points sur le segment unitaire donné (les valeurs prises peuvent être égales à $0, 1, \ldots, m, \ldots$), est répartie suivant la loi de Poisson.

b) Si le nombre moyen d'appels reçus par un central téléphonique pendant une heure d'un intervalle donné de la journée est égal à n, alors la répartition du nombre d'appels reçus pendant une minute suit approximativement la loi de Poisson et, en outre, $a = \frac{n}{60}$.

L'espérance mathématique et la dispersion des variables aléatoires dont la répartition est régie par la loi binomiale et par la loi de Poisson sont déterminées par les formules suivantes:

a) pour la loi binomiale: $M(X) = np$; $D(X) = npq$;

b) pour la loi de Poisson: $M(X) = a$; $D(X) = a$.

762. Un central téléphonique automatique reçoit en moyenne 300 appels par heure. Quelle est la probabilité que durant une minute donnée il recevra exactement deux appels?

S o l u t i o n. Pendant une minute, le central reçoit en moyenne $\frac{300}{60} = 5$ appels, c'est-à-dire $a = 5$. On demande de trouver P_2. La formule de Poisson donne:

$$P_2 = \frac{5^2}{2!} e^{-5} = \frac{25}{2e^5} \cong 0{,}09.$$

763. Un livre de 1000 pages contient 100 erreurs. Quelle est la probabilité de trouver au moins quatre erreurs sur une page ouverte au hasard?

S o l u t i o n. En moyenne, sur une page on trouve $a = \frac{100}{1000} = 0{,}1$ erreur. Dans notre cas, il convient d'appliquer la formule de Poisson:

$$P_m = \frac{(0{,}1)^m}{m!} e^{-0{,}1}.$$

Ici, P_m représente la probabilité d'avoir m erreurs sur une page.

Si $m = 0$, alors $P_0 = e^{-0{,}1}$;

si $m = 1$, alors $P_1 = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}1}$;

si $m = 2$, alors $P_2 = 0{,}005 \cdot e^{-0{,}1}$;

si $m = 3$, alors $P_3 = 0{,}000167 \cdot e^{-0{,}1}$.

La somme $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ représente la probabilité d'avoir trois erreurs au plus sur une page. Cette somme est égale à $1{,}105167 \cdot e^{-0{,}1}$. La probabilité de trouver au moins quatre erreurs

sur une page choisie au hasard sera :

$$1 - 1{,}105167 \cdot e^{0{,}1} = 1 - 1{,}105167 \cdot 0{,}904837 = 1 - 0{,}999996 = \\ = 0{,}000004.$$

764. Une certaine quantité de grains de seigle contient 0,4 % de grains de mauvaises herbes. Quelle est la probabilité de trouver 5 grains de mauvaises herbes parmi 5000 grains choisis au hasard?

Réponse. 0,000055.

765. Déterminer l'espérance mathématique et la dispersion de la fréquence $\frac{m}{n}$ d'arrivée d'un événement aléatoire en n épreuves si la probabilité de réalisation de cet événement durant une épreuve est p.

Réponse. $M\left(X = \frac{m}{n}\right) = p$; $D(X) = \frac{pq}{n}$.

766. Montrer qu'une répartition binomiale se transforme à la limite en la répartition de Poisson si $n \to \infty$ et $p \to 0$, mais si $np = a$.

Indication. Mettre $C_n^m p^m q^{n-m}$ sous la forme

$$\frac{(np)^m \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}(1-p)^{\frac{np}{p}-m}$$

et passer à la limite.

767. Une variable aléatoire X suit la loi de répartition binomiale $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Déterminer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

Solution. On a

$$M(X) = \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=1}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} = np \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n} C_n^m p^{m-1} q^{n-m}.$$

Mais

$$\frac{m}{n} C_n^m = \frac{m}{n} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)m} = C_{n-1}^{m-1}.$$

Par conséquent,

$$M(X) = np \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{(n-1)-(m-1)} = np(p+q)^{n-1},$$

c'est-à-dire $M(X) = np$.

768. Déterminer la dispersion d'une variable aléatoire X régie par une loi de répartition binomiale.

S o l u t i o n. Trouvons au préalable l'espérance mathématique de la variable aléatoire X^2:

$$M(X^2)=\sum_{m=1}^{n} m^2C_n^m p^m q^{n-m}=np\sum_{m=1}^{n} m\cdot\frac{m}{n}C_n^m p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}=$$

$$=np\sum_{m=1}^{n} mC_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}=$$

$$=np\sum_{m=1}^{n}(m-1)C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}+np\sum_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}.$$

La somme $\sum\limits_{m=1}^{n}(m-1)C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}$ représente l'espérance mathématique de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale

$$P(X=m-1)=C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}$$

et, pour cette raison, la somme considérée est égale à $(n-1)p$ (cf. problème précédent), alors que la somme $\sum\limits_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}$ est égale à $(p+q)^{n-1}=1$.

Donc, $M(X^2)=np(n-1)p+np$. Mais $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$ et, par conséquent,

$$D(X)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq.$$

769. Trouver l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X régie par la loi de Poisson $P(X=m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}$.

S o l u t i o n. On a

$$M(X)=\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{a^m e^{-a}}{m!}=\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}=ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Mais $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=e^a$, donc, $M(X)=a$.

770. Trouver la dispersion d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson.

S o l u t i o n. On trouve d'abord $M(X^2)$:

$$M(X^2)=\sum_{m=1}^{\infty} m^2\frac{a^m e^{-a}}{m!}=\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!}=$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!} =$$

$$= a \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{a^{m-1} e^{-a}}{(m-1)!} + a e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

La première somme représente l'espérance mathématique de la variable aléatoire X régie par la loi de Poisson, alors que la seconde somme est égale à e^a. D'où il vient $M(X^2) = a^2 + a$.

Par conséquent, $D(X) = a^2 + a - a^2 = a$.

771. La probabilité d'un coup réussi par un tireur est égale à 2/3. Le tireur tire 15 coups. La variable aléatoire X représente le nombre de coups au but. Trouver l'espérance mathématique et la dispersion de la variable aléatoire X.

S o l u t i o n. Dans le présent cas, il y a lieu d'utiliser les valeurs de l'espérance mathématique et de la dispersion pour la loi de répartition binomiale :

$$M(X) = n \cdot p = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10,$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

§ 10. Loi de répartition normale et fonction de Laplace

La *loi de répartition normale* est caractérisée par la densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Il est aisé de voir que la fonction $f(x)$ vérifie deux conditions imposées à la densité de répartition :

1) $f(x) > 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

La courbe $y = f(x)$ est représentée sur la figure 40. Elle est symétrique par rapport à la droite $x = m$, son ordonnée maximum (pour $x = m$) est égale à $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ et l'axe des abscisses lui est asymptote. Vu que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = m$, le paramètre m exprime l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. D'autre part, $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$, d'où $D(x) = \sigma^2$, ce qui signifie que σ est l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire X.

Introduisons la notation

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

La fonction $\Phi(x)$ est appelée *fonction de Laplace* ou *intégrale de probabilité*.

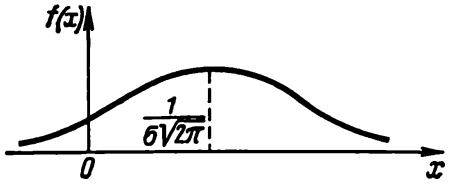

Fig. 40

La probabilité pour qu'une variable aléatoire X qui suit la loi normale se situe dans l'intervalle (a, b) est déterminée par les valeurs de la fonction de Laplace d'après la formule

$$P(a<X<b)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Les valeurs de la fonction de Laplace sont données dans la table ci-dessous :

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,000	1,00	0,843	2,00	0,995
0,05	0,056	1,05	0,862	2,05	0,996
0,10	0,112	1,10	0,880	2,10	0,997
0,15	0,168	1,15	0,896	2,15	0,998
0,20	0,223	1,20	0,910	2,20	0,998
0,25	0,276	1,25	0,923	2,25	0,999
0,30	0,329	1,30	0,934	2,30	0,999
0,35	0,379	1,35	0,944	2,35	0,999
0,40	0,428	1,40	0,952	2,40	0,999
0,45	0,476	1,45	0,960	2,45	0,999
0,50	0,521	1,50	0,966	2,50	0,999
0,55	0,563	1,55	0,972		
0,60	0,604	1,60	0,976		
0,65	0,642	1,65	0,980		
0,70	0,678	1,70	0,984		
0,75	0,711	1,75	0,987		
0,80	0,742	1,80	0,989		
0,85	0,771	1,85	0,991		
0,90	0,797	1,90	0,993		
0,95	0,821	1,95	0,994		

Propriétés de la fonction de Laplace

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

1) $\Phi(0)=0$, car $\int_0^0 e^{-t^2}\,dt=0$;

2) $\Phi(+\infty)=1$, car $\Phi(+\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$;

3) La fonction $\Phi(x)$ est impaire.

La formule

$$P(|X-m|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

est aussi valable. Elle permet de trouver la probabilité qu'une variable aléatoire régie par la loi normale se situe dans un intervalle symétrique par rapport au point m.

772. Une variable aléatoire X d'espérance mathématique $m = 40$ et de dispersion $D = 200$ est régie par la loi normale. Calculer la probabilité que cette variable aléatoire se situe dans l'intervalle (30, 80).

Solution. Ici $a = 30$, $b = 80$, $m = 40$, $\sigma = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; d'où

$$P(30<X<80)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{80-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{30-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[\Phi(2)+\Phi(0{,}5)]=\frac{1}{2}[0{,}995+0{,}521]=\frac{1{,}516}{2}=0{,}758.$$

773. On considère que l'écart de longueur d'une pièce fabriquée par rapport à l'étalon représente une variable aléatoire qui suit la loi normale. Si la longueur étalon $m = 40$ cm et si l'écart quadratique moyen $\sigma = 0{,}4$ cm, dire quelle est la précision de longueur des pièces que l'on peut garantir avec la probabilité 0,8.

Solution. Il faut trouver un nombre positif ε pour lequel

$$P(|X-40|<\varepsilon)=0{,}8.$$

Etant donné que

$$P(|X-40|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}4\sqrt{2}}\right)=\Phi(1{,}77\varepsilon),$$

le problème se ramène à la résolution de l'inégalité $\Phi(1{,}77\varepsilon)>0{,}8$. A l'aide de la table, on trouve $1{,}77\varepsilon>0{,}91$. Il ne reste qu'à trouver la valeur minimum de ε qui vérifie cette inégalité, d'où $\varepsilon = 0{,}52$.

774. On tire à partir du point O le long de l'axe Ox. La portée moyenne du tir est égale à m. En supposant que la portée du tir X suit la loi normale et que l'écart quadratique moyen $\sigma = 80$ m,

trouver le nombre (en %) de coups longs allant au-delà du but de 120 à 160 m.

Réponse. 4,4 %. Le résultat obtenu ne dépend pas de la valeur numérique de m.

775. Une variable aléatoire d'espérance mathématique m et d'écart quadratique moyen σ est régie par la loi normale. Calculer à 0,01 près la probabilité pour que X se situe dans les intervalles $(m, m+\sigma)$, $(m+\sigma, m+2\sigma)$, $(m+2\sigma, m+3\sigma)$.

Réponse. 0,34; 0,14; 0,02.

776. Montrer que la probabilité d'une variable aléatoire X d'espérance mathématique m et d'écart quadratique moyen σ régie par la loi normale de tomber dans l'intervalle (a, b) reste inchangée si chacun des nombres a, b, m et σ est multiplié par λ ($\lambda > 0$).

§ 11. Moment d'une variable aléatoire

On appelle *moment initial* d'ordre s d'une variable aléatoire X donnée par la série de répartition

x_i	x_1	x_2	. . .	x_n	. . .
p_i	p_1	p_2	. . .	p_n	. . .

la somme de la série

$$\alpha_s = x_1^s p_1 + x_2^s p_2 + \ldots + x_n^s p_n + \ldots.$$

S'il s'agit d'une variable aléatoire continue X de densité de probabilité $f(x)$, le moment initial d'ordre s est donné par l'intégrale

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)\, dx.$$

On voit sans difficulté que le moment initial du premier ordre de la variable aléatoire X est égal à l'espérance mathématique de cette variable aléatoire: $\alpha_1 = M(X)$.

On appelle *moment central* d'ordre s d'une variable aléatoire X la somme de la série

$$\mu_s = (x_1 - m_x)^s \cdot p_1 + (x_2 - m_x)^s \cdot p_2 + \ldots + (x_n - m_x)^s \cdot p_n + \ldots,$$

où m_x est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Pour une variable aléatoire continue, le moment central d'ordre s est donné par l'intégrale

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x)\, dx.$$

Pour toute variable aléatoire, le moment central du premier ordre est nul, c'est-à-dire $\mu_1 = 0$.

Le moment central du second ordre de toute variable aléatoire mesure la dispersion de cette variable aléatoire, c'est-à-dire

$$\mu_2 = D(X).$$

Les moments centraux et initiaux du premier, du second, du troisième et du quatrième ordres sont liés par les relations ci-dessous:

$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,$$
$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4.$$

Lorsque la répartition est symétrique par rapport à l'espérance mathématique, alors tous les moments centraux d'ordre impaire sont nuls, c'est-à-dire

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = 0.$$

Le rapport du moment central du troisième ordre au cube de l'écart quadratique moyen est appelé *asymétrie*:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Si la répartition est symétrique par rapport à l'espérance mathématique, alors $S_k = 0$.

Si $S_k > 0$, la courbe qui représente la densité de probabilité a l'allure visible sur la figure 41.

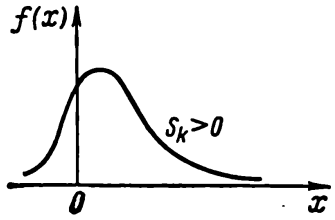

Fig. 41

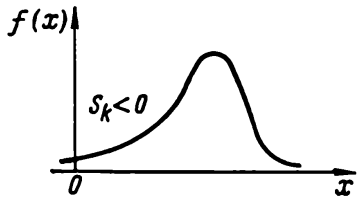

Fig. 42

Si $S_k < 0$, la densité de probabilité est donnée par la courbe de la figure 42.

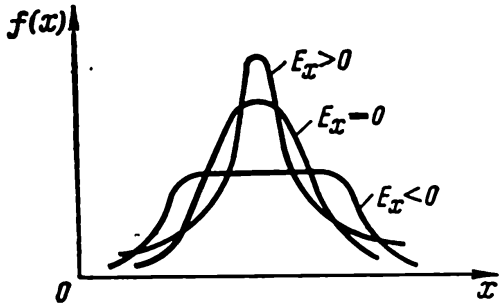

Fig. 43

On appelle *excès* d'une variable aléatoire X la grandeur E_x définie par l'égalité

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Dans le cas d'une loi normale,

$$E_x = 0.$$

Les courbes dont les sommets sont plus pointus par rapport à la courbe normale (*courbe de Gauss*) sont d'excès positif; pour les courbes de sommets plus aplatis, $E_x < 0$ (fig. 43).

777. On donne la série de répartition d'une variable aléatoire X :

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Trouver les moments initiaux et centraux des premiers quatre ordres de cette variable aléatoire et déterminer son asymétrie et son excès.

Solution. Le moment initial du premier ordre

$$\alpha_1 = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 = 4{,}6.$$

C'est l'espérance mathématique, donc $M(X) = 4{,}6$.

Trouvons le moment initial du second ordre :

$$\alpha_2 = 1 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 25 \cdot 0{,}2 + 49 \cdot 0{,}2 + 81 \cdot 0{,}1 = 26{,}6.$$

Le moment initial du troisième ordre

$$\alpha_3 = 1 \cdot 0{,}1 + 27 \cdot 0{,}4 + 125 \cdot 0{,}2 + 343 \cdot 0{,}2 + 729 \cdot 0{,}1 = 177{,}4.$$

Le moment initial du quatrième ordre

$$\alpha_4 = 1 \cdot 0{,}1 + 81 \cdot 0{,}4 + 625 \cdot 0{,}2 + 2401 \cdot 0{,}2 + 6561 \cdot 0{,}1 = 1293{,}8.$$

Trouvons maintenant les moments centraux. On sait que $\mu_1 = 0$. Le moment central du second ordre est donné par la formule

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 26{,}6 - 4{,}6^2 = 26{,}6 - 21{,}16 = 5{,}44.$$

Ce moment initial représente la dispersion de la variable aléatoire, c'est-à-dire $D(X) = 5{,}44$.

Il est maintenant facile de déterminer l'écart quadratique moyen

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}44} = 2{,}33.$$

Le moment central du troisième ordre est donné par la formule

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 177{,}4 - 3 \cdot 4{,}6 \cdot 26{,}6 + 2 \cdot 4{,}6^3 =$$
$$= 177{,}4 - 367{,}08 + 194{,}672 = 4{,}992.$$

L'asymétrie est facile à trouver à l'aide de la formule suivante :

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{4{,}992}{5{,}44 \cdot 2{,}33} = \frac{4{,}992}{12{,}675} = 0{,}394.$$

Pour trouver le moment central du quatrième ordre, utilisons la formule

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 =$$
$$= 1293{,}8 - 4\cdot 4{,}6\cdot 177{,}4 + 6\cdot 4{,}6^2\cdot 26{,}6 - 3\cdot 4{,}6^4 =$$
$$= 1293{,}8 - 3264{,}16 + 3377{,}136 - 1343{,}227 = 64{,}55.$$

On peut maintenant trouver l'excès en appliquant la formule

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{64{,}55}{5{,}44^2} - 3 = \frac{64{,}55}{29{,}59} - 3 = 2{,}18 - 3 = -0{,}82.$$

778. On donne la fonction représentée sur la figure 44 :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ ax^2 & \text{si } 0 \leqslant x < 1; \\ a(2-x)^2 & \text{si } 1 \leqslant x < 2; \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a, la fonction $f(x)$ exprime-t-elle la densité de probabilité de la variable aléatoire X ? Trouver les moments

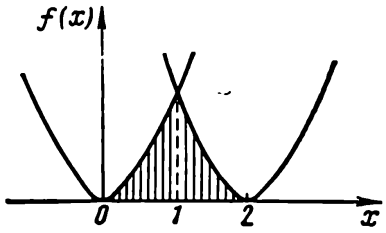

Fig. 44

initiaux et centraux des premiers quatre ordres, l'asymétrie et l'excès.

S o l u t i o n. On détermine a :

$$a\int_0^1 x^2\,dx + a\int_1^2 (2-x)^2\,dx = 1,$$
$$a\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - a\cdot\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_1^2 = 1;$$
$$\frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 1, \text{ i.e. } a = \frac{3}{2}.$$

On trouve les moments initiaux :

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^3\,dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x(2-x)^2\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(6 - \frac{28}{3} + \frac{15}{4}\right) = \frac{3}{8} + 9 - 14 + \frac{45}{8} = 1;$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^4\,dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^2(2-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{2}\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{10} + 14 - \frac{45}{2} + \frac{93}{10} = 1{,}1\,;$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^5\,dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^3(2-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{3}{2}\left(x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^6}{6}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{45}{2} - \frac{186}{5} + \frac{63}{4} = 1{,}3\,;$$

$$\alpha_4 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^6\,dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^4(2-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{14} + \frac{3}{2}\left(\frac{4x^5}{5} - \frac{2x^6}{3} + \frac{x^7}{7}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{14} + \frac{186}{5} - 63 + \frac{381}{14} = 1\,\frac{22}{35}.$$

On trouve les moments centraux:

$$\mu_1 = 0;$$
$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1;$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 1{,}3 - 3\cdot 1{,}1 + 2 = 0$$

(en effet, la courbe admet un axe de symétrie vertical);

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = 1\,\frac{22}{35} - 4\cdot 1{,}3 + 6\cdot 1{,}1 - 3 = \frac{1}{35}.$$

D'où l'on obtient:

$D(X) = \mu_2 = 0{,}1$ (dispersion);

$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}1} = 0{,}316$ (écart quadratique moyen).

On trouve l'asymétrie:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = 0.$$

On trouve l'excès:

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{1/35}{0{,}01} - 3 = -\frac{1}{7}.$$

779. On donne la série de répartition d'une variable aléatoire:

x_i	2	4	6	8
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Trouver les moments initiaux et centraux des premiers quatre ordres de cette variable aléatoire, de même que l'asymétrie et l'excès.

Réponse. $\alpha_1 = 4$; $\alpha_2 = 20$; $\alpha_3 = 116{,}8$; $\alpha_4 = 752$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4$; $\mu_3 = 4{,}8$; $\mu_4 = 35{,}2$; $S_k = 0{,}6$; $E_x = -0{,}8$.

780. On donne la densité de probabilité d'une variable aléatoire X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1; \\ 2-x & \text{si } 1 \leqslant x < 2; \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Trouver les moments initiaux et centraux des premiers quatre ordres, l'asymétrie et l'excès.

Réponse. $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \frac{7}{6}$; $\alpha_3 = \frac{3}{2}$; $\alpha_4 = 2\frac{1}{15}$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \frac{1}{6}$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = \frac{1}{15}$; $S_k = 0$; $E_x = -0{,}6$.

781. Une variable aléatoire X suit une loi de densité de probabilité $f(x) = \lambda e^{-|x|}$. Trouver λ et l'excès de la variable aléatoire X.

Réponse. $\lambda = \frac{1}{2}$; $E_x = 3$.

§ 12. Lois des grands nombres

1. Théorème de Tchébychev. On dit qu'une variable aléatoire X_n *converge en probabilité vers a* si, pour n suffisamment grand, l'inégalité ci-dessous est vérifiée

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, alors que la valeur de δ est fonction du choix de ε et de n. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, on peut formuler le théorème de Tchébychev de la façon suivante: *en présence d'un nombre d'épreuves indépendantes suffisamment grand, la moyenne arithmétique des valeurs observées d'une variable aléatoire converge en probabilité vers l'espérance mathématique de cette dernière*, c'est-à-dire

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

Dans cette inégalité, on peut poser $0 < \delta < \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}$ où $D(X)$ est la dispersion de la variable aléatoire X.

Le théorème de Tchébychev est une des lois des grands nombres qui constituent la base de toutes les applications pratiques de la théorie des probabilités.

2. Théorème de Bernoulli. Une autre loi des grands nombres, qui a été établie avant toutes les autres et qui est d'ailleurs la plus simple, est celle connue

sous le nom de théorème de Bernoulli. Elle se formule comme suit : *en présence d'un accroissement infini du nombre d'épreuves, la fréquence d'un événement aléatoire converge en probabilité vers la probabilité de cet événement*, c'est-à-dire

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\delta$$

$\left(\text{et l'on peut prendre } 0<\delta<\frac{pq}{n\varepsilon^2}\right)$ si la probabilité de l'événement ne varie pas d'une épreuve à l'autre et est égale à p ($q = 1 - p$).

782. On jette une pièce de monnaie 1000 fois. Evaluer par majoration la probabilité que la fréquence d'arrivée du côté face s'écarte de moins de 0,1 de la probabilité d'arrivée de ce côté.

Solution. Ici, $n=1000$, $p=q=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=0{,}1$. En appliquant l'inégalité ci-avant, on obtient

$$P\left(\left|\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}\right|<0{,}1\right)\geqslant 1-\frac{1/2\cdot 1/2}{1000\cdot 0{,}01}=\frac{39}{40}.$$

Etant donné que l'inégalité $\left|\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}\right|<0{,}1$ est équivalente à la double inégalité $400<m<600$, on peut affirmer que la probabilité d'arrivée du côté face dans l'intervalle (400, 600) dépasse $\frac{39}{40}$.

783. Une urne contient 1000 boules blanches et 2000 noires. On tire (avec remise de la boule extraite dans l'urne) 300 boules. Evaluer par majoration la probabilité que le nombre m de boules blanches ainsi extraites satisfasse à la double inégalité $80<m<120$.

Solution. La double inégalité donnée peut s'écrire

$$-20<m-100<20, \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{15}<\frac{m}{300}-\frac{1}{3}<\frac{1}{15}.$$

Ainsi, il faut évaluer la probabilité que l'inégalité $\left|\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{15}$ ait lieu ; par conséquent, $\varepsilon=\frac{1}{15}$ et

$$P\left(\left|\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{15}\right)\geqslant 1-\frac{1/3\cdot 2/3}{300\cdot 1/225}=\frac{5}{6}.$$

784. Supposons que 100 épreuves indépendantes aboutissent à l'établissement de 100 valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ d'une variable aléatoire X. Soient $M(X) = 10$ l'espérance mathématique et $D(X) = 1$ la dispersion. Evaluer par majoration la probabilité que la valeur absolue de la différence entre la moyenne arithmétique des valeurs observées de la variable aléatoire $\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100}$ et l'espérance mathématique soit inférieure à 1/2.

S o l u t i o n. Utilisons l'inégalité

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}.$$

En posant $n = 100$, $M(X) = 10$, $D(X) = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} - 10\right| < \frac{1}{2}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{100 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{24}{25}.$$

Ainsi donc, la probabilité cherchée est supérieure à 0,96.

785. Chacune de deux urnes contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'épreuve consiste en l'extraction d'une boule de chaque urne (la boule tirée est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant). Soit X la variable aléatoire représentée par la somme des numéros des boules extraites des deux urnes. On effectue 100 épreuves. Evaluer par majoration la probabilité que l'intervalle (800, 1400) encadre la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{100} x_i$.

S o l u t i o n. Trouvons la loi de répartition de la variable aléatoire X. Cette variable aléatoire représente la somme des numéros des boules extraites et peut prendre les valeurs suivantes: $x_1 = 2$, $x_2 = 3, \ldots, x_{19} = 20$.

Calculons la probabilité que la valeur de X soit $x_k = k + 1$. Si $k \leqslant 10$, la somme des numéros des boules extraites peut être égale à $k + 1$ dans les k équiprobables cas suivants:

la première boule porte le numéro 1, la deuxième boule, le numéro k;

la première boule porte le numéro 2, la deuxième boule, le numéro $k - 1$;

. . . . . .

la première boule porte le numéro k, la deuxième boule, le numéro 1.

Etant donné que la probabilité de chacune de ces combinaisons est $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$, la probabilité p_k d'obtenir la somme des numéros de deux boules $k+1$ (si $k \leqslant 10$) est égale à $k \cdot \frac{1}{100}$. Donc $p_k = \frac{k}{100}$ (si $k \leqslant 10$).

Si $k > 10$, la somme des numéros des boules extraites peut être égale à $k + 1$ dans les $20 - k$ équiprobables cas suivants:

la première boule porte le numéro $k - 9$, la deuxième boule, le numéro 10;

la première boule porte le numéro $k - 8$, la deuxième boule, le numéro 9;

. . . . . .

la première boule porte le numéro 10, la deuxième boule, le numéro $k - 9$.

Vu que la probabilité de chacune de ces combinaisons reste toujours égale à $\frac{1}{100}$, alors, pour $k > 10$, $p_k = \frac{20-k}{100}$. Pour déterminer $M(X)$ et $D(X)$, formons le tableau ci-dessous:

k	x_k	p_k	$p_k x_k$	$x_k - M(X)$	$[x_k - M(X)]^2$	$p_k [x_k - M(X)]^2$
1	2	0,01	0,02	—9	81	0,81
2	3	0,02	0,06	—8	64	1,28
3	4	0,03	0,12	—7	49	1,47
4	5	0,04	0,20	—6	36	1,44
5	6	0,05	0,30	—5	25	1,25
6	7	0,06	0,42	—4	16	0,96
7	8	0,07	0,56	—3	9	0,63
8	9	0,08	0,72	—2	4	0,32
9	10	0,09	0,90	—1	1	0,09
10	11	0,10	1,10	0	0	0
11	12	0,09	1,08	1	1	0,09
12	13	0,08	1,04	2	4	0,32
13	14	0,07	0,98	3	9	0,63
14	15	0,06	0,90	4	16	0,96
15	16	0,05	0,80	5	25	1,25
16	17	0,04	0,68	6	36	1,44
17	18	0,03	0,54	7	49	1,47
18	19	0,02	0,38	8	64	1,28
19	20	0,01	0,20	9	81	0,81
Σ		1,00	11,00			16,50

De cette façon,

$$M(X) = \sum_{k=1}^{19} p_k x_k = 11, \quad D(X) = 16{,}5.$$

L'inégalité

$$800 < \sum_{i=1}^{100} x_i < 1400$$

est équivalente à l'inégalité

$$-300 < \sum_{i=1}^{100} x_i - 1100 < 300,$$

ou à l'inégalité

$$-3 < \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} - 11 < 3,$$

ou, enfin, à l'inégalité

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} - 11 \right| < 3.$$

De cette façon, $\varepsilon = 3$.

Par conséquent, $P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} - 11 \right| < 3\right) \geqslant 1 - \frac{16,5}{900} \cong 0,982.$

786. Un dé à six faces est lancé 10000 fois. Evaluer la probabilité que la fréquence d'amener 6 points s'écarte de moins de 0,01 de la probabilité d'amener 6 points.

Réponse. $P\left(\left|\frac{m}{10\,000} - \frac{1}{6}\right| < 0,01\right) \geqslant \frac{31}{36}$.

787. Une urne contient 100 boules blanches et 100 noires. On tire 50 boules, la boule extraite étant remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant. Evaluer par majoration la probabilité que le nombre de boules blanches du nombre des boules extraites satisfasse à la double inégalité $15 < m < 35$.

Réponse. $P\left(\left|\frac{m}{50} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{5}\right) \geqslant \frac{7}{8}$.

788. A la suite de 200 épreuves indépendantes on trouve les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{200}$ d'une variable aléatoire X. On sait en outre que $M(X) = D(X) = 2$. Evaluer par majoration la probabilité que la valeur absolue de la différence entre la moyenne arithmétique des valeurs de la variable aléatoire $\frac{\sum_{i=1}^{200} x_i}{200}$ et l'espérance mathématique soit inférieure à $\frac{1}{5}$.

Réponse. $\frac{3}{4}$.

§ 13. Théorème de Moivre-Laplace

Si l'on effectue n épreuves et si dans chacune de ces épreuves la probabilité de réalisation d'un événement A est p, alors la fréquence de réalisations de cet événement $\frac{m}{n}$ représente une variable aléatoire régie par la loi binomiale, son espérance mathématique et sa dispersion étant respectivement p et $\sqrt{\frac{pq}{n}}$. La variable aléatoire $\tau_n = \frac{\frac{m}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ dont l'espérance mathématique est nulle, alors que la dispersion est égale à l'unité est appelée fréquence *normée* de l'événement aléatoire considéré (elle suit aussi la loi binomiale).

Le théorème de Moivre-Laplace affirme qu'en présence d'un accroissement infini du nombre d'épreuves n, la loi binomiale qui régie la fréquence normée se transforme à la limite en une loi normale de même espérance mathématique (c'est-à-dire nulle) et de même dispersion (c'est-à-dire égale à l'unité). En vertu de ce théorème, lorsque n est grand, pour trouver les probabilités des inégalités vérifiées par la fréquence (ou par le nombre d'arrivées) d'un événement aléatoire, on peut faire appel à une estimation approchée à l'aide de l'intégrale de probabilité (fonction de Laplace). Notamment, les formules ci-dessous sont valables:

$$P\left\{a<\frac{\frac{m}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}<b\right\}=P\left\{a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b\right\}\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

789. Quelle est la probabilité qu'en n épreuves un événement A soit réalisé de α à β fois? La probabilité d'arrivée de l'événement A est p.

Solution. La double inégalité

$$a<\frac{x-np}{\sqrt{npq}}<b$$

est équivalente à la double inégalité

$$np+a\sqrt{npq}<x<np+b\sqrt{npq}.$$

On pose $np+a\sqrt{npq}=\alpha$, $np+b\sqrt{npq}=\beta$. D'où

$$a=\frac{\alpha-pn}{\sqrt{npq}},\quad b=\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}}.$$

En appliquant le théorème de Moivre-Laplace, on obtient

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{2npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{2npq}}\right)\right].$$

790. En chaque épreuve, la probabilité d'un événement A est égale à 0,7. Combien de fois faut-il répéter l'épreuve pour que l'on puisse attendre avec une probabilité égale à 0,9 que la fréquence d'arrivée de l'événement A va s'écarter de la probabilité de 0,05 au plus?

Solution. Les conditions du problème donnent $\left|\frac{X}{n}\right| - 0,7 \mid < 0,05$. D'où l'on tire $0,65n < X < 0,75n$. Dans la formule obtenue lors de la résolution du problème précédent, on met $\alpha = 0,65n$, $\beta = 0,75n$. Alors

$$P(0,65n < X < 0,75n) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{0,75n-0,7n}{\sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{0,65n-0,7n}{\sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)\right] = \Phi\left(\frac{\sqrt{2n}}{20}\right).$$

On trouve n de l'équation $\Phi\left(\frac{\sqrt{2n}}{20}\right) = 0,9$. D'où $\frac{\sqrt{2n}}{20} = 1,17$, c'est-à-dire $n = 274$.

791. Quelle est la probabilité que 100 jets d'une pièce de monnaie amènent face de 40 à 60 fois?

Indication. Utiliser le résultat du problème 789, en posant $\alpha = 40$, $\beta = 60$, $n = 100$, $p = q = \frac{1}{2}$;

$$P(40 < X < 60) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{60-50}{\sqrt{50}}\right) - \Phi\left(\frac{40-50}{\sqrt{50}}\right)\right].$$

Réponse. 0,954.

792. Une urne contient 80 boules blanches et 20 noires. Combien de boules (avec remise de la boule extraite dans l'urne) faut-il tirer pour que l'on puisse attendre avec une probabilité égale à 0,95 que la fréquence de sortie d'une boule blanche va s'écarter de la probabilité de sortie de moins de 0,1?

Réponse. 61.

§ 14. Systèmes de variables aléatoires

Il arrive souvent que le résultat d'une épreuve soit décrit non pas par une variable aléatoire X, mais par plusieurs variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On dit, dans ce cas, que les variables aléatoires forment un système $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Un système de deux variables aléatoires (X, Y) peut être représenté par un point aléatoire dans le plan.

Un événement qui consiste en l'encadrement dans un domaine D d'un point aléatoire $(X; Y)$ se note $(X; Y) \subset D$.

La loi de répartition de deux variables aléatoires discrètes peut être donnée à l'aide d'un tableau de la forme

$X \backslash Y$	y_1	y_2		y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

où $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} représentant la probabilité d'un événement consistant en la vérification simultanée des égalités $X = x_i$, $Y = y_j$. Dans ce cas, $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Le tableau ci-dessus peut contenir une infinité de lignes et de colonnes.

La loi de répartition d'un système de variables aléatoires continues (X, Y) sera donnée à l'aide d'une fonction densité de probabilité $f(x, y)$.

La probabilité que le point aléatoire $(X : Y)$ se situe dans le domaine D est définie par l'égalité

$$P[(X ; Y) \subset D] = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

La fonction densité de probabilité jouit des propriétés suivantes:

$$1)\ f(x, y) \geqslant 0, \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Si tous les points aléatoires $(X ; Y)$ appartiennent à un domaine fini D la condition susmentionnée prend la forme

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Les espérances mathématiques des variables aléatoires discrètes X et Y figurant dans le système sont données par les formules

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \quad m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij},$$

alors que les espérances mathématiques des variables aléatoires continues sont déterminées comme suit:

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$m_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y)\, dx\, dy.$$

Le point $(m_x; m_y)$ est appelé *centre de dispersion* du système de variables aléatoires (X, Y).

Dans le cas où les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, les espérances mathématiques m_x et m_y peuvent être trouvées d'une façon plus simple, en partant des lois de répartition de ces variables aléatoires et en appliquant la formule citée au paragraphe 6 du présent chapitre.

Les dispersions des variables aléatoires discrètes X et Y sont calculées par les formules

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} (x_i - m_x)^2,$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} (y_j - m_y)^2.$$

Si les variables aléatoires X et Y figurant dans le système sont continues, leurs dispersions sont données par les formules

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 \cdot f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}$$

étant les écarts quadratiques moyens des variables aléatoires X et Y. Les dispersions peuvent être calculées par les formules

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$
$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2.$$

Un rôle important dans la théorie des systèmes de variables aléatoires joue l'ainsi appelé *moment de corrélation* (*covariance*)

$$C_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Pour les valeurs aléatoires discrètes, le moment de corrélation est trouvé d'après la formule

$$C_{xy} = \sum_m \sum_n (x_n - m_x)(y_m - m_y)\, p_{nm},$$

alors que pour les variables aléatoires continues on utilise la formule

$$C_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y)\, f(x, y)\, dx\, dy.$$

Le moment de corrélation peut aussi être calculé par la formule

$$C_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$$

Ici,

$$M(XY) = \sum_m \sum_n x_n y_m p_{mn}$$

pour les variables aléatoires discrètes X et Y, et

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)\,dx\,dy$$

dans le cas, où les variables aléatoires sont continues.

Les variables aléatoires X et Y sont dites *indépendantes* si la probabilité de l'une d'elles de prendre une valeur située dans n'importe quel intervalle du domaine de ses valeurs ne dépend pas de la valeur prise par l'autre variable aléatoire. Dans ce cas,

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y);\ C_{xy} = 0.$$

La liaison entre les variables aléatoires X et Y est caractérisée par l'ainsi appelé *coefficient de corrélation*

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y},$$

qui est une grandeur sans dimension.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $r_{xy} = 0$. Mais si ces variables aléatoires sont liées entre elles par une relation linéaire bien définie $Y = aX + b$, alors $r_{xy} = \operatorname{sign} a$, c'est-à-dire $r_{xy} = 1$ si $a > 0$, et $r_{xy} = -1$ si $a < 0$.

Généralement parlant, le coefficient de corrélation vérifie la condition

$$-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1.$$

793. Chacune de deux urnes contient 6 boules :

1-re urne	**2-e urne**
1 boule portant le n° 1,	2 boules portant le n° 1,
2 boules portant le n° 2,	3 boules portant le n° 2,
3 boules portant le n° 3.	1 boule portant le n° 3.

Soient X le numéro de la boule extraite de la 1-ère urne et Y le numéro de la boule tirée de la seconde urne.

On tire une boule de chaque urne. Former le tableau de la loi de répartition du système de variables aléatoires (X, Y).

Solution.

Le point aléatoire (1; 1) est de multiplicité $1 \times 2 = 2$.
Le point aléatoire (1; 2) est de multiplicité $1 \times 3 = 3$.
Le point aléatoire (1; 3) est de multiplicité $1 \times 1 = 1$.
Le point aléatoire (2; 1) est de multiplicité $2 \times 2 = 4$.
Le point aléatoire (2; 2) est de multiplicité $2 \times 3 = 6$.
Le point aléatoire (2; 3) est de multiplicité $2 \times 1 = 2$.
Le point aléatoire (3; 1) est de multiplicité $3 \times 2 = 6$.
Le point aléatoire (3; 2) est de multiplicité $3 \times 3 = 9$.
Le point aléatoire (3; 3) est de multiplicité $3 \times 1 = 3$.

En tout, il y a $6 \times 6 = 36$ points aléatoires (un point de multiplicité n correspond à n points).

Etant donné que le rapport entre la multiplicité d'un point et le nombre total de points est égal à la probabilité d'apparition de ce point, le tableau de la loi de répartition du système de variables

aléatoires données prend la forme

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

La somme de toutes les probabilités indiquées au tableau est égale à l'unité.

794. Trouver l'espérance mathématique des variables aléatoires X et Y en se plaçant dans les conditions du problème précédent.

Solution. On a

$$m_x = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{36}+$$

$$+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{2+8+18+3+12+27+1+4+9}{36}=2\frac{1}{3};$$

$$m_y = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{18}+$$

$$+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{2+6+3+4+12+6+6+18+9}{36}=1\frac{5}{6}.$$

Le point $\left(2\frac{1}{3};\ 1\frac{5}{6}\right)$ est le centre de dispersion du système (X, Y) donné.

Vu que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes (cf. conditions du problème précédent), les espérances mathématiques peuvent être calculées d'une façon plus simple, en utilisant les séries de répartition :

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

y_j	1	2	3
p_j	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

D'où l'on trouve

$$m_x = \sum p_i x_i = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=2\frac{1}{3}.$$

$$m_y = \sum p_j y_j = \frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}=1\frac{5}{6}.$$

795. Trouver la dispersion des variables aléatoires X et Y, les conditions du problème 793 restant les mêmes.

Solution. Passons du système de variables aléatoires (X, Y) à un système de variables aléatoires centrées $(\mathring{X}, \mathring{Y})$, où

$$\mathring{X} = X - m_x = X - 2\frac{1}{3}, \quad \mathring{Y} = Y - m_y = Y - 1\frac{5}{6}.$$

$\mathring{X}$ \ $\mathring{Y}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{6}$
$-1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

On a

$$D(X) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} +$$
$$+ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} =$$
$$= \frac{16}{9}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) =$$
$$= \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9},$$

$$D(Y) = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} +$$
$$+ \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} =$$
$$= \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{2} + \frac{49}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{108} + \frac{1}{72} + \frac{49}{216} = \frac{17}{36}.$$

D'où l'on tire

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

Remarquons que $D(X)$ et $D(Y)$ peuvent être trouvées par les formules

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \quad D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2.$$

796. Trouver le coefficient de corrélation, en se plaçant dans les conditions du problème 793.

S o l u t i o n. Utilisons le tableau de répartition du système de variables aléatoires centrées $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$.

Déterminons la covariance C_{xy}:

$$C_{xy} = \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} + \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{36} +$$
$$+ \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{18} +$$
$$+ \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{12} =$$
$$= -\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{108} + \frac{1}{72} + \frac{7}{216}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{54} + \frac{1}{36} + \frac{7}{108}\right) +$$
$$+ \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{24} + \frac{7}{72}\right) = -\frac{4}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 0 = 0.$$

Vu que $C_{xy} = 0$, le coefficient de corrélation $r_{xy} = 0$.

Le même résultat aurait pu être obtenu sans détermination de la covariance C_{xy}. En effet, en posant $Y = 1$, on trouve que:

la valeur $X = 1$ se répète 2 fois;
la valeur $X = 2$ se répète 4 fois;
la valeur $X = 3$ se répète 6 fois.

Ainsi, pour $Y = 1$, on obtient la série suivante de répartition de la variable aléatoire X:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Lorsque $Y = 2$:
la valeur $X = 1$ se répète 3 fois;
la valeur $X = 2$ se répète 6 fois;
la valeur $X = 3$ se répète 9 fois.

Donc, si $Y = 2$, on obtient la série suivante de répartition de la variable aléatoire X:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Finalement, si $Y = 3$:
la valeur $X = 1$ se répète 1 fois;
la valeur $X = 2$ se répète 2 fois;
la valeur $X = 3$ se répète 3 fois.

Pour $Y = 3$, la série de répartition de la variable aléatoire X sera :

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

On voit donc, que pour différentes valeurs de Y, la série de répartition de la variable aléatoire X reste inchangée.

Etant donné que la série de répartition de la variable aléatoire X ne dépend pas des valeurs prises par la variable aléatoire Y, ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

Il s'ensuit que le coefficient de corrélation est nul.

797. Un système de variables aléatoires (X, Y) suit une loi de répartition de densité

$$f(x, y) = a(x^2 + y^2) \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 \leqslant r^2 \ (r > 0);$$
$$f(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 > r^2.$$

Trouver le coefficient a.

S o l u t i o n. Le coefficient a est déterminé à partir de l'équation $a \cdot \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 1$, où D est un disque borné par circonférence $x^2 + y^2 = r^2$. En passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$a \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\theta = 1, \quad \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi a = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = \frac{2}{\pi r^4}.$$

798. Un système de variables aléatoires (X, Y) est régi par une loi de répartition de densité

$$f(x, y) = a(x + y) \text{ dans le domaine } D$$

et

$$f(x, y) = 0 \text{ en dehors de ce domaine,}$$

où D est un carré borné par les droites $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$.

a) Déterminer le coefficient a.

b) Calculer la probabilité que le carré Q borné par les droites $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$ encadre le point aléatoire $(X ; Y)$.

c) Trouver les espérances mathématiques m_x et m_y.

d) Trouver les écarts quadratiques moyens σ_x et σ_y.

S o l u t i o n. a) Le coefficient a est déterminé à partir de l'équation

$$a \int_0^3 \int_0^3 (x + y)\, dx\, dy = 1,$$

d'où

$$a\int_0^3\int_0^3 (x+y)\,dx\,dy = a\int_0^3 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3 dx = a\cdot\int_0^3 \left(3x+\frac{9}{2}\right) dx =$$

$$= a\left[\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right]_0^3 = a\left(\frac{27}{2}+\frac{27}{2}\right) = 27a, \quad 27a=1, \quad \text{i.e.} \quad a=\frac{1}{27}.$$

b) $P[(X\,;Y)\subset Q] = \frac{1}{27}\int_1^2\int_1^2 (x+y)\,dx\,dy =$

$$= \frac{1}{27}\int_1^2 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 dx = \frac{1}{27}\int_1^2 \left(2x+2-x-\frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{27}\int_1^2 \left(x+\frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{27}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{27}\left(2+3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{9}.$$

c) On trouve les espérances mathématiques m_x et m_y :

$$m_x = \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{27}\int_0^3 \left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_0^3 dx =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^3 \left(3x^2+\frac{9}{2}x\right) dx = \frac{1}{27}\left[x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{27}\left(27+\frac{81}{4}\right) = 1\,\frac{3}{4}.$$

Par conséquent, on a également $m_y = 1\frac{3}{4}$.

d) On trouve les écarts quadratiques moyens σ_x et σ_y :

$$\sigma_x^2 = \iint_D (x-m_x)^2\cdot f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 \left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot(x+y)\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 \left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(x-\frac{7}{4}+y+\frac{7}{4}\right) dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 \left(x-\frac{7}{4}\right)^3 dy\,dx + \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 \left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right) dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{27}\cdot\int_0^3 \left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot y\Big|_0^3 dx + \frac{1}{27\cdot 2}\cdot\int_0^3 \left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)^2\Big|_0^3 dx =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{\left(x-\frac{7}{4}\right)^4}{4}\Bigg|_0^3 + \frac{1}{27\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{361}{16}-\frac{49}{16}\right)\Big|_0^3 =$$

$$=\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{625}{256}-\frac{2401}{256}\right)+\frac{1}{162}\cdot\frac{39}{2}\left(\frac{125}{64}+\frac{343}{64}\right)=$$

$$=-\frac{1}{36}\cdot\frac{1776}{256}+\frac{1}{162}\cdot\frac{39}{2}\cdot\frac{468}{64}=-\frac{37}{192}+\frac{169}{192}=\frac{132}{192}=\frac{11}{16}.$$

Donc, $\sigma_x=\sigma_y=\frac{\sqrt{11}}{4}$.

799. Un système de variables aléatoires (X, Y) suit une loi de répartition de densité

$$f(x, y)=a\cdot\sin(x+y) \text{ dans le domaine } D$$

et

$$f(x, y)=0 \text{ en dehors de ce domaine.}$$

Le domaine D est déterminé par les inégalités suivantes :

$$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

a) Déterminer le coefficient a.
b) Trouver m_x, m_y, σ_x, σ_y.
c) Déterminer le coefficient de corrélation r_{xy}.

S o l u t i o n. a) Le coefficient a est trouvé de l'équation

$$a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dy\,dx=1.$$

D'où

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dy\,dx=-a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx=$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx=a(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2a.$$

Donc, $a=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $f(x, y)=\frac{1}{2}\sin(x+y)$ dans le domaine D.

b) $$m_x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin(x+y)\,dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dy=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\right]x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)\,dx = \frac{1}{2}x(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

D'une façon identique on trouve $m_y = \frac{\pi}{4}$.

$$\sigma_x^2 = M(X^2)-[M(X)]^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\sin(x+y)\,dy\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin x+\cos x)\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x-\cos x)\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}+x(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}+(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Par conséquent,

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_x\sigma_y = \frac{\pi^2+8\pi-32}{16}.$$

c) On détermine la covariance C_{xy} :

$$C_{xy} = M(XY)-M(X)\cdot M(Y) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\sin(x+y)\,dy\,dx - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cdot\sin(x+y)\,dy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[y\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\,dy\right]x\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin x\right]dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\frac{\pi}{2}\sin x - \cos x + \sin x\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2}\sin x + \cos x - \sin x\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}x\left(\sin x - \frac{\pi}{2}\cos x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x - \frac{\pi}{2}\cos x + \cos x\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}.$$

D'où

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} = -\frac{0{,}73688}{3{,}00232} = -0{,}2454.$$

800. On donne le tableau qui détermine la loi de répartition d'un système de variables aléatoires (X, Y):

$X \backslash Y$	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

a) Trouver λ.
b) Trouver les espérances mathématiques m_x et m_y.
c) Trouver les dispersions σ_x^2 et σ_y^2.
d) Trouver le coefficient de corrélation r_{xy}.

Réponse. a) $\lambda = \frac{1}{20}$; b) $m_x = 22$, $m_y = 41$; c) $\sigma_x^2 = 56$, $\sigma_y^2 = 259$; d) $r_{xy} = 0{,}56$.

801. Un système de variables aléatoires (X, Y) suit une loi de répartition de densité

$$f(x, y) = axy \text{ dans le domaine } D$$

et

$$f(x, y) = 0 \text{ en dehors de ce domaine.}$$

Le domaine D est représenté par un triangle borné par les droites $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

a) Trouver a.
b) Trouver les espérances mathématiques m_x et m_y.
c) Trouver les dispersions σ_x^2 et σ_y^2.
d) Trouver le coefficient de corrélation r_{xy}.

Réponse. a) $a = 24$; b) $m_x = m_y = \frac{2}{5}$; c) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{1}{25}$; d) $r_{xy} = -\frac{2}{3}$.

802. Un système de variables aléatoires (X, Y) est régi par une loi de répartition de densité

$$f(x, y) = a^2 - x^2 = y^2, \text{ si } x^2 + y^2 \leqslant a^2 \ (a > 0);$$
$$f(x, y) = 0, \text{ si } x^2 + y^2 > a^2.$$

a) Trouver a.
b) Trouver les espérances mathématiques m_x et m_y.
c) Trouver les dispersions σ_x^2 et σ_y^2.
d) Trouver le coefficient de corrélation r_{xy}.

Réponse. a) $a = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$; b) $m_x = m_y = 0$; c) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$; d) $r_{xy} = 0$.

§ 15. Lignes de régression. Corrélation

On donne un système de variables aléatoires (X, Y). Supposons qu'à la suite de n épreuves on ait obtenu n points $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, . . ., $(x_n ; y_n)$ (il est possible que certains de ces points se confondent).

On demande de calculer le coefficient de corrélation de ce système de variables aléatoires.

En vertu de la loi des grands nombres, pour n assez grand, on peut remplacer dans les formules permettant de calculer σ_x^2, σ_y^2 et C_{xy} les espérances mathématiques $M(X)$ et $M(Y)$ par les moyennes arithmétiques des variables aléatoires

correspondantes. On obtient ainsi les égalités approchées suivantes:

$$M(X) \approx \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \quad M(Y) \approx \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n},$$

$$\sigma_x^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2; \quad \sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2, \quad C_{xy} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}.$$

D'où l'on trouve le coefficient de corrélation d'après la formule

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Si $|r_{xy}|\sqrt{n-1} \geqslant 3$, alors la liaison entre les variables aléatoires X et Y est assez probable. Si la liaison entre X et Y est établie, alors l'approximation linéaire $\bar{y}_x$ en fonction de x est donnée par la formule de la *régression linéaire*

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}),$$

ou

$$\bar{y}_x = ax + b.$$

L'approximation linéaire $\bar{x}_y$ en fonction de y est donnée par la formule de la régression linéaire

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}),$$

ou

$$\bar{x}_y = cy + d.$$

Il faut avoir en vue que $\bar{y}_x = ax + b$ et $\bar{x}_y = cy + d$ sont des droites qui ne se confondent pas (fig. 45). La première de ces droites est obtenue en résol-

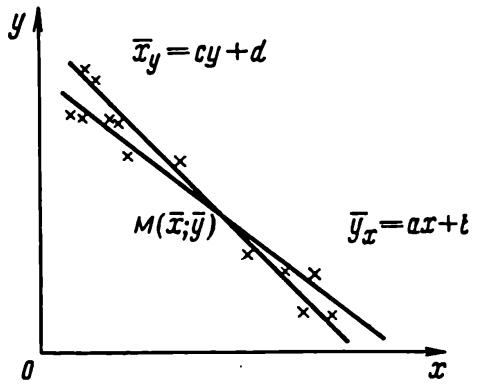

Fig. 45

vant le problème de minimisation de la somme des carrés des écarts suivant la verticale, alors que la seconde droite résulte en résolvant le même problème suivant l'horizontale.

Pour former les équations des régressions linéaires, il faut:

1) à l'aide du tableau initial des valeurs (X, Y) calculer $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y, C_{xy}, r_{xy};

2) vérifier l'hypothèse d'existence d'une liaison entre X et Y;

3) former les équations des deux lignes de régression et tracer les courbes représentatives correspondantes.

803. On donne le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0,25	0,37	0,44	0,55	0,60	0,62	0,68	0,70	0,73
Y	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,60	1,51	1,50

Suite

i	10	11	12	13	14	15	16	17
X	0,75	0,82	0,84	0,87	0,88	0,90	0,95	1,00
Y	1,41	1,33	1,31	1,25	1,20	1,19	1,15	1,00

Déterminer le coefficient de corrélation r_{xy} et les équations des lignes de régression.

S o l u t i o n. Formons le tableau de calcul :

i	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	0,25	2,57	0,0625	6,6049	0,6425
2	0,37	2,31	0,1369	5,3361	0,8547
3	0,44	2,12	0,1936	4,4944	0,9328
4	0,55	1,92	0,3025	3,6864	1,0560
5	0,60	1,75	0,3600	3,0625	1,0500
6	0,62	1,71	0,3844	2,9241	1,0602
7	0,68	1,60	0,4624	2,5600	1,0880
8	0,70	1,51	0,4900	2,2801	1,0570
9	0,73	1,50	0,5329	2,2500	1,0950
10	0,75	1,41	0,5625	1,9881	1,0575
11	0,82	1,33	0,6724	1,7689	1,0906
12	0,84	1,31	0,7056	1,7161	1,1004
13	0,87	1,25	0,7569	1,5625	1,0875
14	0,88	1,20	0,7744	1,4400	1,0560
15	0,90	1,19	0,8100	1,4161	1,0710
16	0,95	1,15	0,9025	1,3225	1,0925
17	1,00	1,00	1,0000	1,0000	1,0000
Σ	11,95	26,83	9,1095	45,4127	17,3917

De ce tableau l'on tire :

$$\sum_{i=1}^{17} x_i = 11{,}95, \quad \sum_{i=1}^{17} y_i = 26{,}83,$$

$$\sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 9{,}1095, \quad \sum_{i=1}^{17} y_i^2 = 45{,}4127, \quad \sum_{i=1}^{17} x_i y_i = 17{,}3917.$$

On trouve maintenant

$$\bar{x} = \frac{11{,}95}{17} = 0{,}7029,$$

$$\bar{y} = \frac{26{,}83}{17} = 1{,}5782,$$

$$\sigma_x^2 = \frac{9{,}1095}{17} - (0{,}7029)^2 = 0{,}0418,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{45{,}4127}{17} - (1{,}5782)^2 = 0{,}1806,$$

$$\sigma_x = 0{,}2042, \quad \sigma_y = 0{,}4250,$$

$$C_{xy} = \frac{17{,}3917}{17} - 0{,}7029 \cdot 1{,}5782 = -0{,}0863,$$

$$r_{xy} = \frac{-0{,}0863}{0{,}2042 \cdot 0{,}4250} = -0{,}9943.$$

Calculons la valeur du produit $|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1}$; vu que $|r_{xy}| \times \times \sqrt{n-1} = 0{,}9943 \cdot 4 = 3{,}9772 > 3$, la liaison est assez bien fondée.

Les équations des lignes de régression sont :

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}),$$

$$\bar{y}_x - 1{,}5782 = -\frac{0{,}9943 \cdot 0{,}4250}{0{,}2042} (x - 0{,}7029),$$

$$\bar{y}_x = -2{,}0695x + 3{,}0329 ;$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}),$$

$$\bar{x}_y - 0{,}7029 = -\frac{0{,}9943 \cdot 0{,}2042}{0{,}4250} \cdot (y - 1{,}5782),$$

$$\bar{x}_y = -0{,}4776y + 1{,}4566.$$

Après avoir construit les points résultant du tableau et les lignes de régression, on voit que les deux lignes passent par le point M (0,7029 ; 1,5782). La première ligne détermine sur l'axe des ordonnées le segment 3,0329, alors que la seconde définit sur l'axe des abscisses le segment 1,4566. Les points $(x_i ; y_i)$ se situent dans le voisinage des lignes de régression.

804. Soient σ_S la limite d'élasticité et σ_B la limite de rupture d'une marque d'acier, Y étant sa teneur (en %) en carbone.

A la suite de 79 épreuves, on obtient le tableau suivant de corrélation des grandeurs $X = \frac{\sigma_S}{\sigma_B}$ et Y:

X \ Y	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	0	2	0	8
0,6	0	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	0	0
0,9	1	0	0	0

Les entiers figurant au tableau indiquent l'ordre de multiplicité des valeurs des points aléatoires correspondants. Ainsi, par exemple, le point de coordonnées $x = 0{,}8$, $y = 0{,}6$ est de multiplicité 14, ce qui signifie qu'en 14 épreuves la valeur $x = 0{,}8$ était accompagnée par la valeur $y = 0{,}6$.

On demande de déterminer le coefficient de corrélation et les équations des lignes de régression.

Solution. On trouve

$$\bar{x} = \frac{0{,}5\,(2+8)+0{,}6\,(4+2+9)+0{,}7\,(2+12+3+1)+0{,}8\,(21+14)+0{,}9\cdot 1}{79} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 10+0{,}6\cdot 15+0{,}7\cdot 18+0.8\cdot 35+0.9\cdot 1}{79} =$$

$$= \frac{5+9+12{,}6+28+0{,}9}{79} = \frac{55{,}5}{79} = 0{,}703\,;$$

$$\bar{y} = \frac{0{,}5\,(2+21+1)+0{,}6\,(2+4+12+14)+0{,}7\,(2+3)+0{,}8\,(8+9+1)}{79} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 24+0{,}6\cdot 32+0{,}7\cdot 5+0{,}8\cdot 18}{79} = \frac{12+19{,}2+3{,}5+14{,}4}{79} =$$

$$= \frac{49{,}1}{79} = 0{,}622.$$

Déterminons les moyennes arithmétiques des grandeurs x^2, y^2 et xy:

$$\frac{\Sigma x^2}{79} = \frac{(0{,}5)^2\cdot(2+8)+(0{,}6)^2\cdot(4+2+9)+(0{,}7)^2\cdot(2+12+3+1)+ +(0{,}8)^2\cdot(21+14)+(0{,}9)^2\cdot 1}{79} =$$

$$= \frac{0{,}25\cdot 10+0{,}36\cdot 15+0{,}49\cdot 18+0{,}64\cdot 35+0{,}81}{79} =$$

$$= \frac{2{,}5+5{,}4+8{,}82+22{,}4+0{,}81}{79} = \frac{39{,}93}{79} = 0{,}505\,;$$

$$\frac{\Sigma y^2}{79}=\frac{\begin{array}{c}(0{,}5)^2\cdot(2+21+1)+(0{,}6)^2\cdot(2+4+12+14)+(0{,}7)^2\cdot(2+3)+\\+(0{,}8)^2\cdot(8+9+1)\end{array}}{79}=$$

$$=\frac{0{,}25\cdot 24+0{,}36\cdot 32+0{,}49\cdot 5+0{,}64\cdot 18}{79}=$$

$$=\frac{6+11{,}52+2{,}45+11{,}52}{79}=\frac{31{,}49}{79}=0{,}398\,;$$

$$\frac{\Sigma xy}{79}=\frac{\begin{array}{c}0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 2+0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 8+0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 4+0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 2+0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 9+\\+0{,}7\cdot 0{,}5\cdot 2+0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 12+0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 3+0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 1+\\+0{,}8\cdot 0{,}5\cdot 21+0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 14+0{,}9\cdot 0{,}5\cdot 1\end{array}}{79}=$$

$$=\frac{1}{79}\cdot(0{,}6+3{,}2+1{,}44+0{,}84+4{,}32+0{,}7+5{,}04+$$

$$+1{,}47+0{,}56+8{,}4+6{,}72+0{,}45)=\frac{33{,}74}{79}=0{,}427.$$

Trouvons les dispersions et la covariance:

$\sigma_x^2=0{,}505-(0{,}703)^2=0{,}505-0{,}493=0{,}012$; $\sigma_x=0{,}11$;
$\sigma_y^2=0{,}398-(0{,}622)^2=0{,}398-0{,}387=0{,}011$; $\sigma_y=0{,}105$;
$C_{xy}=0{,}427-0{,}703\cdot 0{,}622=0{,}427-0{,}437=-0{,}01$.

Trouvons le coefficient de corrélation:

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=-\frac{0{,}01}{0{,}11\cdot 0{,}105}=-0{,}867.$$

Calculons la valeur du produit $|r_{xy}|\cdot\sqrt{n-1}$:

$$|r_{xy}|\cdot\sqrt{n-1}=0{,}867\cdot\sqrt{79-1}=0{,}867\cdot\sqrt{78}=0{,}867\cdot 8{,}84=7{,}66.$$

Etant donné que $|r_{xy}|\sqrt{n-1}>3$, la liaison est assez probable.

Les équations des lignes de régression sont:

$$\bar{y}_x-\bar{y}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x}),$$

$$\bar{y}_x-0{,}622=-0{,}867\cdot\frac{0{,}105}{0{,}11}\cdot(x-0{,}703),$$

$$\bar{y}_x-0{,}622=-0{,}828\,(x-0{,}703),\quad \bar{y}_x=-0{,}828x+1{,}204\,;$$

$$\bar{x}_y-\bar{x}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot(y-\bar{y}),$$

$$\bar{x}_y-0{,}703=-0{,}867\cdot\frac{0{,}11}{0{,}105}\cdot(y-0{,}622),$$

$$\bar{x}_y-0{,}703=-0{,}908\,(y-0{,}622),\quad \bar{x}_y=-0{,}908y+1{,}268.$$

805. On donne le tableau de corrélation des variables aléatoires X et Y, où X est le délai de service d'une roue de voiture (en ans), Y étant l'usure moyenne (en mm) mesurée suivant l'épaisseur de la couronne de roue. Déterminer le coefficient de corrélation et les équations des lignes de régression.

X \ Y	0	2	7	12	17	22	27	32	37	42
0	3	6								
1	25	108	44	8	2					
2	3	50	60	21	5	5				
3	1	11	33	32	13	2	3	1		
4		5	5	13	13	7	2			
5			1	2	12	6	3	2	1	
6		1		1			2	1		1
7			1	1				1		

Réponse. $r_{xy} = 0{,}664$; $\bar{y}_x = 3{,}64x - 0{,}15$; $\bar{x}_y = 0{,}12y + 1{,}24$.

806. On donne le tableau de corrélation des valeurs aléatoires X et Y, où X est la flèche de courbure du rail (en cm), Y étant le nombre de défauts de ce rail (en cm par 25 m de longueur du rail).

Déterminer le coefficient de corrélation et les équations des lignes de régression :

X \ Y	0	5	10	15	20
7,0	2				
7,5	1	1		1	1
8,0		1			1
8,5	2				
9,0	2		1	1	3
9,5				2	
10,0	3	2	4	3	3
10,5	4	5	1	3	1
11,0	3		3	2	6
11,5	3	5	1		9
12,0	5	3	6	4	4
12,5	1	1	3	10	6
13,0	1		1	4	5
13,5	1	1		1	6
14,0	2		1		3
14,5			2		1
15,0					
15,5		1	1		
16,0					3

Réponse. $r_{xy} = 0{,}321$; $\bar{y}_x = 1{,}21x - 2{,}45$; $\bar{x}_y = 0{,}085y + 10{,}58$.

CHAPITRE VI

NOTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

§ 1. Equations différentielles du premier ordre linéaires par rapport aux dérivées partielles

Examinons l'équation différentielle

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z, \tag{1}$$

où X, Y et Z sont des fonctions de x, y et z.

Résolvons au préalable le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Admettons que la solution de ce système soit donnée par les égalités

$$\omega_1(x, y, z)=C_1,$$
$$\omega_2(x, y, z)=C_2.$$

Alors l'intégrale générale de l'équation différentielle (1) est de la forme

$$\Phi[\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)]=0,$$

où $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ est une fonction continûment différentiable arbitraire.

807. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

Solution. Considérons le système d'équations $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$.

En résolvant l'équation $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, on obtient $\frac{y}{x}=C_1$; la solution de l'équation $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ sera $\frac{z}{x}=C_2$.

On peut maintenant trouver l'intégrale de l'équation donnée:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0, \quad \text{ou} \quad \frac{z}{x}=\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

c'est-à-dire $z=x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, où ψ est une fonction arbitraire.

808. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Solution. Ecrivons le système d'équations

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{0}.$$

Une des propriétés des proportions nous permet de mettre l'équation $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$ sous la forme

$$\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy}, \quad \text{ou} \quad \frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}.$$

En intégrant, on obtient

$$-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C, \quad \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C, \quad \frac{2y}{x^2-y^2}=C.$$

La dernière égalité peut s'écrire $\frac{y}{x^2-y^2}=C_1$.

La deuxième équation du système $dz=0$, d'où l'on tire $z=C_2$. L'intégrale générale est de la forme

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2-y^2}, z\right)=0,$$

d'où

$$z=\psi\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right).$$

809. Trouver la surface qui vérifie l'équation

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$$

et qui passe par la circonférence

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=3. \end{cases}$$

Solution. On résout le système d'équations

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=-\frac{dz}{2xy}.$$

En faisant disparaître le dénominateur, on obtient le système

$$x\,dx = y\,dy$$
$$2x\,dx = -z\,dz.$$

L'intégration de ces équations donne

$$x^2-y^2=C_1,$$
$$x^2+\frac{z^2}{2}=C_2.$$

L'intégrale générale de l'équation donnée est de la forme

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\psi(x^2-y^2).$$

Maintenant, il faut trouver la surface faisant partie de la famille définie par cette équation et passant par la circonférence

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=3. \end{cases}$$

Pour trouver la fonction ψ figurant dans l'égalité qui définit l'intégrale générale, on pose $x^2 = 16 - y^2$, $z = 3$. On en tire

$$16-y^2+\frac{9}{2}=\psi(16-2y^2).$$

Notons $16-2y^2=t$, d'où $y^2=8-\frac{t}{2}$. Par conséquent $\psi(t)=\frac{t+25}{2}$, c'est-à-dire

$$\psi(x^2-y^2)=\frac{x^2-y^2+25}{2}.$$

En partant de l'égalité qui définit l'intégrale générale, on obtient l'équation de la surface

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\frac{x^2-y^2+25}{2},$$

c'est-à-dire $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. On voit que la surface cherchée est une sphère.

810. Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin x+\frac{\partial z}{\partial y}\sin y=\sin z.$$

Réponse. $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\psi\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right).$

811. Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

Réponse. $z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2)$.

812. Trouver la surface vérifiant l'équation $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$ et passant par la parabole

$$\begin{cases} y^2=z, \\ x=0. \end{cases}$$

Réponse. Le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$.

§ 2. Exemples des plus simples équations différentielles aux dérivées partielles

813. Trouver la fonction $z = z(x, y)$ vérifiant l'équation différentielle $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

Solution. En intégrant, on trouve

$$z = x + \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction arbitraire. Ainsi, on a trouvé la solution générale de l'équation différentielle donnée.

814. Résoudre l'équation différentielle $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, où $z = z(x, y)$.

Solution. En effectuant une double intégration, on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x), \quad z = y^3 + y \cdot \varphi(x) + \psi(x),$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont des fonctions arbitraires.

815. Résoudre l'équation différentielle $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$.

Solution. Tout d'abord, on procède à l'intégration de l'équation donnée par rapport à x: $\frac{\partial z}{\partial y} = f(y)$. Ensuite, on intègre le résultat obtenu par rapport à y et l'on obtient

$$z = \varphi(x) + \psi(y), \quad \text{où} \quad \psi(y) = \int f(y)\, dy.$$

816. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 1$.

Réponse. $z = xy + \varphi(x) + \psi(y)$.

817. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $\frac{\partial z^4}{\partial x^2\, \partial y^2} = 0$.

Réponse. $z = x \cdot \varphi_1(y) + \varphi_2(y) + y \cdot \varphi_3(x) + \varphi_4(x)$.

§ 3. Types d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre. Réduction à la forme canonique

Examinons l'équation du second ordre

$$a \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \tag{1}$$

où a, b et c sont des fonctions de x et y.

On dit que cette équation est de *type hyperbolique* dans un domaine D si dans ce domaine $b^2 - ac > 0$; si $b^2 - ac = 0$, l'équation est de *type parabolique*; si $b^2 - ac < 0$, l'équation est de *type elliptique*.

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

est appelée *équation canonique de type hyperbolique.*

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

est appelée *équation canonique de type parabolique.*

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

est appelée *équation canonique de type elliptique.*

L'équation différentielle

$$a\cdot dy^2-2b\,dx\,dy+c\cdot dx^2=0$$

est appelée *équation des caractéristiques* de l'équation

$$a\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

Si cette dernière équation est de type hyperbolique, l'équation des caractéristiques possède deux intégrales:

$$\varphi(x, y)=C_1, \quad \psi(x, y)=C_2,$$

ce qui signifie qu'il y a deux familles de caractéristiques réelles.

En effectuant le changement de variables $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, on réduit l'équation différentielle (1) à sa forme canonique:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}=\Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

Dans le cas d'une équation de type parabolique, les deux familles de caractéristiques se confondent, c'est-à-dire que l'équation des caractéristiques ne donne qu'une seule intégrale $\varphi(x, y)=C$.

Dans ce cas, on effectue le changement de variables $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ où $\psi(x, y)$ est une certaine fonction pour laquelle $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0$. A la suite du changement de variables, on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

Pour l'équation de type elliptique, les intégrales de l'équation des caractéristiques sont de la forme

$$\varphi(x, y)\pm i\psi(x, y)=C_{1,2},$$

où $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont des fonctions réelles.

En posant $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, on réduit l'équation (1) à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

818. Réduire à la forme canonique l'équation

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

S o l u t i o n. Dans ce cas, $a = x^2$, $b = 0$, $c = -y^2$, $b^2 - ac = x^2y^2 > 0$; on a donc affaire à une équation de type hyperbolique. Etablissons l'équation des caractéristiques

$$x^2dy^2 - y^2\,dx^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (x\,dy + y\,dx)\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

On obtient deux équations différentielles

$$x\,dy + y\,dx = 0 \quad \text{et} \quad x\,dy - y\,dx = 0.$$

Après avoir effectué la séparation des variables, on a :

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Intégrons les équations

$$\ln y + \ln x = \ln C_1 \quad \text{et} \quad \ln y - \ln x = \ln C_2.$$

En revenant des logarithmes aux nombres, on obtient

$$xy = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = C_2,$$

c'est-à-dire les équations des deux familles de caractéristiques.

On introduit les nouvelles variables $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$.

On exprime les dérivées partielles par rapport aux anciennes variables à l'aide des dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y - \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)y - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)y - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot y - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y^2 - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\cdot\partial \eta}\cdot\frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4} + 2\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\cdot\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

On porte les valeurs des dérivées secondes dans l'équation différentielle donnée :

$$x^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot y^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{x^3}\right)-$$
$$-y^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot y^2+2\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{x}=0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{xy}=0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

et l'équation est ainsi réduite à la forme canonique.

819. Réduire à la forme canonique l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\sin^2 x-2y\sin x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

S o l u t i o n. Dans ce cas, $a=\sin^2 x$, $b=-y\sin x$, $c=y^2$. Etant donné que $b^2-ac=y^2\cdot\sin^2 x-y^2\cdot\sin^2 x=0$, l'équation en question est de type parabolique.

L'équation des caractéristiques est de la forme

$$\sin^2 x\cdot dy^2+2y\cdot\sin x\,dx\,dy+y^2\cdot dx^2=0,$$

ou

$$(\sin x\,dy+y\,dx)^2=0.$$

En séparant les variables dans l'équation $\sin x\,dy+y\,dx=0$, on obtient

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\sin x}=0.$$

A la suite de l'intégration, on a

$$\ln y+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\ln C,$$

c'est-à-dire

$$y\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=C.$$

Effectuons le changement de variables $\xi=y\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\eta=y$ (une fonction arbitraire) :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial z}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\cdot\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot y\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot y^2\cdot\sec^4\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\cdot\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)y\cdot\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec^2\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\cdot\partial \eta}\right)y\cdot\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec^2\frac{x}{2}.$$

Portons les valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ dans l'équation différentielle :

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}y^2\cdot\sec^4\frac{x}{2}\cdot\sin^2 x+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\sin^2 x-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)\cdot y^2\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\sin x-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\sin x+$$

$$+y^2\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right)=0.$$

On peut montrer sans difficulté que les termes contenant $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta^2}$ se suppriment mutuellement et que l'équation prend la forme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\sin^2 x+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\sin x=0,$$

ou

$$y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sin x,$$

mais

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\xi}{\eta},$$

c'est-à-dire

$$\sin x=\frac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Finalement on obtient 1259

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

820. Réduire à la forme canonique l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Solution. Ici $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, $b^2 - ac = -1 < 0$, ce qui montre que l'équation est de type elliptique.

L'équation des caractéristiques va s'écrire

$$dy^2 + 2dx\,dy + 2dx^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y'^2 + 2y' + 2 = 0.$$

D'où $y' = -1 \pm i$; on obtient ainsi deux familles de caractéristiques imaginaires:

$$y + x - ix = C_1 \quad \text{et} \quad y + x + ix = C_2.$$

Effectuons le changement de variables $\xi = y + x$, $\eta = x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

En portant les valeurs trouvées des dérivées partielles dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

821. Réduire à la forme canonique l'équation

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial z} + y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Réponse. $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$, $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = y$.

822. Réduire à la forme canonique l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + 6\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Réponse. $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = 3x + y$.

823. Réduire à la forme canonique l'équation

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Réponse. $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0,\quad \xi=y^2,\quad \eta=x^2.$

§ 4. Equation de la corde vibrante

1. Résolution de l'équation de la corde vibrante par la méthode des caractéristiques (méthode de D'Alembert). On appelle *corde* un fil mince flexible. Supposons que le long de la corde est exercée une forte tension initiale T_0. Sous l'influence d'une certaine force la corde quitte la position d'équilibre pour commencer à vibrer (fig. 46).

Dans ce qui suit, on se limitera à l'examen des petites vibrations transversales de la corde s'effectuant dans un même plan suivant les conditions ci-après:

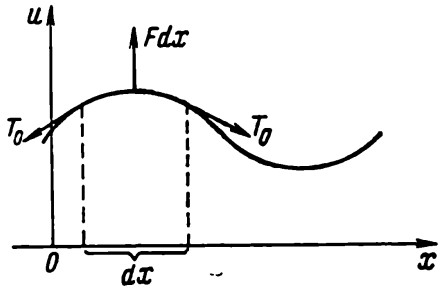

Fig. 46

les déplacements des points de la corde par rapport à la position de repos sont de faible ampleur; à tout moment, tous les points de la corde se trouvent dans un même plan et chaque point oscille tout en restant sur la même perpendiculaire à la droite désignant la position de repos de la corde.

En prenant cette droite pour l'axe Ox, désignons par $u = u(x, t)$ le déplacement des points de la corde par rapport à la position d'équilibre au temps t. Pour chaque valeur fixée de t, la courbe représentative de la fonction $u = u(x, t)$ dans le plan xOu représente la forme de la corde au moment t.

La fonction $u = u(x, t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f,$$

où $a^2=\frac{T_0}{\rho}$, $f=\frac{F}{\rho}$, ρ est la masse de la corde par unité de longueur (densité linéaire de la corde), F est la force qui agit sur la corde par unité de longueur suivant la perpendiculaire à l'axe des abscisses.

S'il n'y a pas de force extérieure, c'est-à-dire si $f = 0$, on obtient l'*équation des vibrations libres de la corde*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pour définir d'une façon complète le mouvement de la corde, il faut donner sa forme et sa vitesse au moment initial, c'est-à-dire la position et la vitesse de chacun de ses points en fonction de leurs abscisses x. Soit $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$. Ce sont les *conditions initiales* du problème.

On réduit l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

à la forme canonique et l'on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = 0$, où $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

La solution générale de la dernière équation s'écrit

$$u = \Theta_1(\xi) + \Theta_2(\eta),$$

où $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, Θ_1, Θ_2 étant des fonctions arbitraires.

De cette façon, la *solution générale de l'équation différentielle des vibrations libres d'une corde prend la forme*

$$y = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at).$$

En choisissant les fonctions Θ_1 et Θ_2 de façon que la fonction $u = u(x, t)$ puisse satisfaire aux conditions initiales données, on aboutit à la solution de l'équation différentielle initiale sous la forme suivante:

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz.$$

824. Résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{si} \quad u\Big|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Solution. Vu que $a = 1$, alors que $\psi(x) = 0$, on a

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2},$$

où $\varphi(x) = x^2$. De cette façon, $u = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2}$,

ou finalement $u = x^2 + t^2$.

825. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{si} \quad u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = x.$$

Solution. Ici, $a = 2$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x$. D'où

$$u = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} z \cdot dz = \frac{1}{8} z^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8}[(x + 2t)^2 - (x - 2t)^2],$$

c'est-à-dire $u = xt$.

826. Trouver la forme d'une corde au moment $t = \frac{\pi}{2a}$ si son mouvement est défini par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et si $u\Big|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1$.

Solution. On a

$$u=\frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz,$$

c'est-à-dire

$$u=\sin x\cdot\cos at+\frac{1}{2a}\cdot z\Big|_{x-at}^{x+at},$$

et finalement $u=\sin x\cdot\cos at+t$. Si $t=\frac{\pi}{2a}$, alors $u=\frac{\pi}{2a}$, ce qui signifie que la corde est parallèle à l'axe des abscisses.

827. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si

$$u\Big|_{t=0}=x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-x.$$

Réponse. $u=x(1-t)$.

828. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si $u\Big|_{t=0}=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$.

Réponse. $u=\frac{\cos x\cdot\sin at}{a}$.

829. Trouver la forme d'une corde au moment $t=\pi$ si son mouvement est défini par l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et si $u\Big|_{t=0}=\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$.

Réponse. $u=-\sin x$.

2. Résolution de l'équation de la corde vibrante par la méthode de Fourier. La solution de l'équation différentielle $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ qui satisfait aux conditions initiales

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$

et aux conditions aux limites

$$u\,|_{x=0}=0,\quad u\,|_{x=l}=0,$$

peut être mise sous la forme de la somme d'une série infinie:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

où

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ b_k=\frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Les conditions aux limites indiquées plus haut sont introduites lors de l'étude des vibrations d'une corde de longueur l fixée en deux points: $x=0$ et $x=l$.

830. Une corde fixée à ses extrémités $x = 0$, $x = l$ a la forme d'une parabole $u = \frac{4h}{l^2} \cdot x\,(l - x)$. Déterminer le déplacement des points de cette corde par rapport à l'axe des abscisses si les vitesses initiales sont nulles (fig. 47).

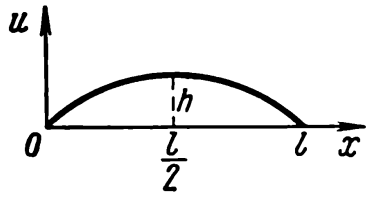

Fig. 47

Solution. Ici, $\varphi(x) = \frac{4h}{l^2} \cdot x\,(l - x)$, $\psi(x) = 0$. On trouve les coefficients de la série qui définit la solution de l'équation de la corde vibrante:

$$a_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{8h}{l^3} \cdot \int_0^l (lx - x^2) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad b_k = 0.$$

Pour trouver a_k, on fait appel à l'intégration par parties:

$$u_1 = lx - x^2, \quad dv_1 = \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx,$$

$$du_1 = (l - 2x)\, dx, \quad v_1 = -\frac{1}{k\pi} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\ ;$$

$$a_k = -\frac{8h}{l^3}(lx - x^2) \cdot \frac{1}{k\pi} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2} \cdot \int_0^l (l - 2x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx,$$

c'est-à-dire

$$a_k = \frac{8h}{k\pi l^2} \cdot \int_0^l (l - 2x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx;$$

$$u_2 = l - 2x, \quad dv_2 = \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad du_2 = -2dx,$$

$$v_2 = \frac{l}{k\pi} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\ ; \quad a_k = \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l - 2x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l +$$

$$+ \frac{16h}{k^2\pi^2 l} \cdot \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = -\frac{16h}{k^3\pi^3} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l =$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3} \cdot [1 - (-1)^k].$$

Etant donné que

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \cdot \sin\frac{k\pi at}{l}\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l},$$

on a

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16h}{k^3\pi^3} \cdot [1-(-1)^k] \cdot \cos\frac{k\pi at}{l} \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Mais pour $k=2n$, $1-(-1)^k=0$, alors que pour $k=2n+1$, $1-(-1)^k=2$ et finalement on trouve

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi at}{l} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

831. On donne une corde fixée à ses extrémités $x = 0$, $x = l$. Supposons qu'initialement la corde occupe la position représentée

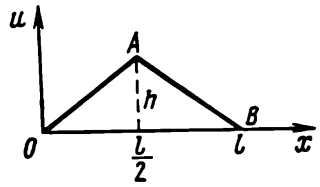

Fig. 48

sur la figure 48 par la ligne brisée OAB. Trouver la forme de la corde à tout moment t si les vitesses initiales sont nulles.

Solution. Le coefficient angulaire de la droite OA est égal à $\frac{h}{l/2} = \frac{2h}{l}$, ce qui donne comme équation de cette droite $u = \frac{2h}{l} \cdot x$. La droite AB détermine sur les axes de coordonnées les segments l et $2h$ et a comme équation $\frac{x}{l} + \frac{u}{2h} = 1$, ou $u = \frac{2h}{l}(l-x)$. Donc,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}; \\ \frac{2h}{l}(l-x) & \text{si } \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

$$\psi(x) = 0.$$

On trouve

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{4h}{l^2} \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} x \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx +$$

$$+ \frac{4h}{l^2} \cdot \int_{\frac{l}{2}}^{l} (l-x) \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx,$$

$$b_k = 0.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$a_k = -\frac{4h}{k\pi l}\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}} + \frac{4h}{k\pi l}\cdot\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx -$$

$$-\frac{4h}{k\pi l}(l-x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l} - \frac{4h}{k\pi l}\cdot\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= -\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}} +$$

$$+\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l} =$$

$$= \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{8h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$u(x,\ t) = \frac{8h}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}.$$

Ecrivons plusieurs termes de cette série :

$$u(x,\ t) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi at}{l} - \frac{1}{3^2}\cdot\sin\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi at}{l} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5^2}\cdot\sin\frac{5\pi x}{l}\cdot\cos\frac{5\pi at}{l} - \frac{1}{7^2}\cdot\sin\frac{7\pi x}{l}\cdot\cos\frac{7\pi at}{l} + \ldots\right).$$

832. Supposons qu'initialement les déplacements d'une corde fixée aux points $x = 0$, $x = l$ soient nuls et que la vitesse initiale soit exprimée par la formule

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} v_0\,(\text{const}) & \text{si} \quad \left|x - \frac{l}{2}\right| < \frac{h}{2}\,; \\ 0 & \text{si} \quad \left|x - \frac{l}{2}\right| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Déterminer la forme de la corde à tout moment t.

Solution. Ici, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = v_0$ dans l'intervalle $\left(\frac{l-h}{2},\ \frac{l+h}{2}\right)$, alors que $\psi(x) = 0$ en dehors de cet intervalle.

Par conséquent, $a_k = 0$;

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \cdot \int\limits_{\frac{1}{2}(l-h)}^{\frac{1}{2}(l+h)} v_0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx = -\frac{2v_0}{k\pi a} \cdot \frac{l}{k\pi} \cdot \cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_{\frac{1}{2}(l-h)}^{\frac{1}{2}(l+h)} =$$

$$= \frac{2v_0 l}{k^2\pi^2 a} \cdot \left[\cos\frac{k\pi(l-h)}{2l} - \cos\frac{k\pi(l+h)}{2l}\right] = \frac{4v_0 l}{k^2\pi^2 a} \cdot \sin\frac{k\pi}{2} \cdot \sin\frac{k\pi h}{2l}.$$

D'où

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sin\frac{k\pi}{2} \cdot \sin\frac{k\pi h}{2l} \cdot \sin\frac{k\pi a t}{l} \cdot \sin\frac{k\pi x}{l},$$

ou

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \cdot \left(\sin\frac{\pi h}{2l} \cdot \sin\frac{\pi a t}{l} \cdot \sin\frac{\pi x}{l} - \right.$$

$$-\frac{1}{3^2} \cdot \sin\frac{3\pi h}{2l} \cdot \sin\frac{3\pi a t}{l} \sin\frac{3\pi x}{l} +$$

$$\left. + \frac{1}{5^2} \cdot \sin\frac{5\pi h}{2l} \cdot \sin\frac{5\pi a t}{l} \cdot \sin\frac{5\pi x}{l} - \ldots\right).$$

833. On donne une corde fixée à ses extrémités $x = 0$, $x = 3$. Initialement, la corde occupe la position montrée par la ligne brisée

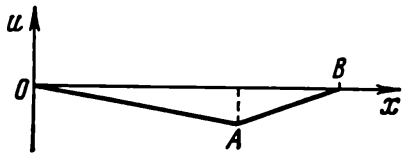

Fig. 49

OAB sur la figure 49 : O (0 ; 0), A (2 ; — 0,1), B (3 ; 0). Trouver la forme de la corde à tout moment t en supposant que les vitesses initiales de ses points soient nulles.

Réponse.

$$u(x, t) = -\frac{0{,}9}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sin\frac{2\pi k}{3} \cdot \sin\frac{k\pi x}{3} \cdot \cos\frac{k\pi a t}{3}.$$

834. Une corde fixée à ses extrémités $x = 0$ et $x = 1$ occupe initialement la position $u = h(x^4 - 2x^3 + x)$. Trouver la forme de la corde à tout moment t si les vitesses initiales sont nulles.

Réponse.

$$u = \frac{96h}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^5} \cos(2k+1)\pi a t \cdot \sin(2k+1)\pi x.$$

835. Une corde est fixée aux points $x = 0$ et $x = l$. Les déplacements initiaux des points de cette corde sont nuls, alors que la vitesse initiale est donnée par la formule

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi\left(x-\frac{l}{2}\right)}{h} & \text{si } \left|x-\frac{l}{2}\right| < \frac{h}{2}; \\ 0 & \text{si } \left|x-\frac{l}{2}\right| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Trouver la forme de la corde à tout moment t.

Réponse. $u(x, t) = \dfrac{4hl^2}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi k}{2}\cdot\cos\frac{k\pi h}{l}}{l^2-k^2h^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi a t}{l}.$

§ 5. Equation de diffusion thermique (de la chaleur)

1. Equation de diffusion thermique pour le cas non stationnaire. Désignons par $u = u(M, t)$ la température au point M et au temps t d'un corps homogène borné par la surface S. On sait que la quantité de chaleur dQ absorbée par le corps pendant le laps de temps dt est donnée par la formule

$$dQ = k\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt, \qquad (*)$$

où dS est un élément de surface, k est l'ainsi appelé coefficient de diffusion thermique du matériau, $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée de la fonction u par rapport à la normale extérieure à la surface S. Etant donné que la diffusion de la chaleur s'effectue dans le sens de la diminution de la température, alors $dQ > 0$ si $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$, et $dQ < 0$ si $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$.

L égalité (*) donne

$$Q = dt\cdot\iint\limits_S \cdot k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS.$$

Calculons Q d'une autre manière. Considérons un élément de volume dV du corps borné par la surface S. La quantité de chaleur dQ absorbée par l'élément dV pendant dt est proportionnelle à la hausse de température de cet élément et à sa masse, c'est-à-dire

$$dQ = \gamma\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\cdot\rho\,dV,$$

où ρ est la densité du matériau, γ étant un coefficient de proportionnalité appelé capacité thermique du même matériau. On a ainsi

$$Q = dt\cdot\iiint\limits_V \gamma\cdot\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dV.$$

De cette façon, on obtient

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = a^2 \cdot \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

où $a^2 = \frac{k}{\rho\gamma}$. Vu que $\frac{\partial u}{\partial n} = |\operatorname{grad} u|$ et $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k}$, mettons l'égalité obtenue sous la forme

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = a^2 \iint\limits_S \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, z)\right] dS.$$

En remplaçant le deuxième membre de cette égalité à l'aide de la formule d'Ostrogradski-Gauss, on a

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = a^2 \iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dV$$

et l'on arrive à l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

qui est appelée *équation de diffusion thermique pour le cas non stationnaire.*

Si le corps a la forme d'une tige dirigée suivant l'axe Ox, l'équation de diffusion thermique prend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Dans ce qui suit, on examinera le problème de Cauchy relatif à trois cas distincts.

1. Cas d'une tige de longueur infinie. Le problème consiste à trouver la solution $u(x, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ -\infty < x < +\infty,$$

de façon que la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), \ -\infty < x < +\infty$$

soit satisfaite.

En appliquant la méthode de Fourier, on obtient la solution suivante de l'équation donnée:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \cdot d\xi.$$

2. Cas d'une tige de longueur semi-infinie. La solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ satisfaisant à la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ et à la condition aux limites $u(0, t) = \varphi(t)$ est donnée par la formule

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int\limits_0^{\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}}\right] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int\limits_0^{t} \varphi(\eta) \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t - \eta)}} \cdot (t - \eta)^{-\frac{3}{2}}\, d\eta.$$

3. Cas d'une tige de longueur finie $x=0$, $x=l$. Dans ce cas, le problème de Cauchy consiste à trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, de façon à satisfaire la condition initiale $u(x, t)\big|_{t=0} = f(x)$ et deux conditions aux limites, par exemple

$$u_{x=0} = u\,|_{x=l} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0.$$

Dans ce cas, la solution particulière est donnée par la série

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k \cdot e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\right.,$$

où

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx$$

(pour les conditions aux limites $u\,|_{x=0} = u\,|_{x=l} \equiv 0$), et par la série

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} + a_0,$$

où

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\, dx$$

$\left(\text{pour les conditions aux limites } \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} \equiv 0\right)$.

836. Résoudre l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si la répartition initiale de la température d'une tige est définie par l'égalité

$$u(x, t)\,|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} u_0 & \text{si} \quad x_1 < x < x_2; \\ 0 & \text{si} \quad x < x_1 \text{ ou } x > x_2. \end{cases}$$

Solution. Etant donné que la tige est de longueur infinie, la solution est donnée par l'intégrale de Poisson :

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi.$$

Vu que $f(x)$ est égale à la température constante u_0 dans l'intervalle (x_1, x_2) et qu'en dehors de cet intervalle la température est nulle, la solution prend la forme

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi.$$

Le résultat obtenu peut être amené à l'ainsi appelée *intégrale de probabilité*:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu.$$

En effet si l'on pose $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = -2a\sqrt{t} \cdot d\mu$, on obtient

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu =$$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu.$$

De cette façon, la solution est donnée par la formule

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \cdot \left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

La courbe représentative de la fonction $\Phi(z)$ est

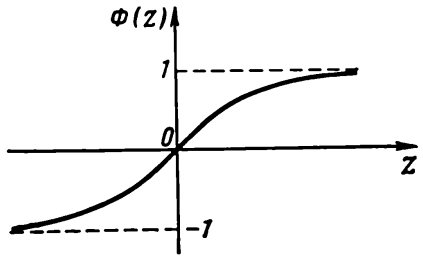

Fig. 50

visible sur la figure 50. Les valeurs de cette fonction sont données au tableau de la page 249.

837. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ de façon que la condition initiale $u|_{t=0} = f(x) = u_0$ et la condition aux limites $u|_{x=0} = 0$ soient satisfaites.

S o l u t i o n. Ici on a affaire à une tige de longueur semi-infinie. La solution satisfaisant aux conditions imposées est de la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty u_0 \cdot \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}}\right] d\xi,$$

ou

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\xi + x)^2}{4t}} \right] d\xi.$$

a) En posant $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = -2\sqrt{t} \cdot d\mu$, transformons la première intégrale à l'aide de l'intégrale de probabilité, c'est-à-dire

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{2} \cdot \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right].$$

b) En posant $\frac{x+\xi}{2\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = 2\sqrt{t} \cdot d\mu$, on obtient

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{2} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right].$$

Ainsi, la solution prend la forme

$$u(x, t) = u_0 \cdot \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right).$$

838. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l)$, $t > 0$ satisfaisant aux conditions initiales

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{l}{2}; \\ l - x, & \text{si } \frac{l}{2} \leqslant x < l \end{cases}$$

et aux conditions aux limites $u|_{x=0} = u|_{x=l} \equiv 0$.

Solution. On cherche la solution du problème de Cauchy satisfaisant aux conditions aux limites sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^\infty b_k \cdot e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l},$$

où

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l - x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Intégrons par parties en posant $u=x$, $dv=\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$, $du=dx$ et $v=-\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$. On obtient

$$b_k=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_0^{\frac{l}{2}}+$$

$$+\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}-\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}=$$

$$=\frac{4l}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Par conséquent, la solution cherchée est de la forme

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{l^2}}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

ou

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}}\cdot\sin\frac{(2n+1)\,\pi x}{l}.$$

839. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, satisfaisant aux conditions initiales

$$u(x,\ t)\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{l} & \text{si}\quad 0\leqslant x\leqslant l;\\ 1+\frac{x}{l} & \text{si}\quad -l\leqslant x\leqslant 0;\\ 0 & \text{si}\quad x\geqslant l \text{ et } x\leqslant -l.\end{cases}$$

Indication. La solution sera donnée par la formule

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-l}^{0}\left(1+\frac{\xi}{l}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{0}^{l}\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi.$$

Simplifier la réponse en effectuant le changement $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}=\mu$.

Réponse.

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}}\right)-2\cdot\frac{x}{l}\cdot\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\frac{1}{l}\sqrt{\frac{l}{\pi}}\left[e^{-\frac{(x+l)^2}{4t}}-2e^{-\frac{x^2}{4t}}+e^{-\frac{(x-l)^2}{4t}}\right].$$

840. Trouver la solution de l'équation de diffusion thermique si l'extrémité gauche $x = 0$ d'une tige de longueur semi-infinie est isolée et si la répartition initiale de la température est donnée par l'égalité

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0; \\ u_0 & \text{si} \quad 0 < x < l; \\ 0 & \text{si} \quad l < x. \end{cases}$$

Réponse. $u(x, t) = \frac{u_0}{2} \cdot \left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$.

841. On donne une tige mince homogène de longueur l isolée du milieu ambiant et dont la température initiale est exprimée par l'égalité $f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$. Les extrémités de la tige sont maintenues à une température nulle. Déterminer la température de la tige au moment $t > 0$.

Indication. La loi de répartition de la température dans la tige est décrite par l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, la condition initiale $u|_{t=0} = f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$ et les conditions aux limites $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$.

Réponse.

$$u(x, t) = \frac{8c}{\pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

2. Equation de diffusion thermique pour le cas stationnaire. Dans ce cas, l'équation en question se transforme en l'*équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (**)$$

car $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$. L'équation de Laplace peut s'écrire

$$\Delta u = 0.$$

Ici, u est une fonction indépendante de temps qui ne dépend que du point considéré. Pour les problèmes qui se rapportent aux figures planes, l'équation de Laplace s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (***)$$

Dans l'espace, l'équation de Laplace a la même forme si u est indépendante de la coordonnée z, c'est-à-dire si $u(M)$ ne varie pas avec le déplacement du point M suivant une droite parallèle à l'axe des z. En effectuant le changement $x = r \cdot \cos\Theta$, $y = r \cdot \sin\Theta$ on peut écrire l'équation (***) en coordonnées polaires:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\Theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\Theta+2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}\sin\Theta\cos\Theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\Theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\Theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\cdot\sin\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\cdot\sin^2\Theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}r^2\cdot\sin\Theta\cos\Theta+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\Theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\Theta-\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\Theta.$$

D'où

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

ou

$$r^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=0.$$

A l'équation de Laplace se rattache la notion de fonction harmonique. Une fonction est dite *harmonique* dans un domaine D si elle aussi bien que ses dérivées jusqu'à celle d'ordre deux inclusivement sont continues dans ce domaine et si elle vérifie l'équation de Laplace. Ainsi, pour l'équation (**), la fonction $u=\frac{1}{r}$, où

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

est une fonction harmonique en tout domaine, à l'exception du point $M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Pour tout domaine plan, la fonction $u=\ln\frac{1}{r}$ (ou $u=\ln r$) sera une fonction harmonique, ce qui signifie qu'elle vérifie l'équation(***).

Le problème de la recherche de la fonction u harmonique dans le domaine D, continue dans ce domaine y compris la surface S qui le borne et satisfaisant à la condition aux limites $u\,|_{\text{sur } S}=f\,(M)$, où $f\,(M)=f\,(x,\ y,\ z)$ est une fonction donnée continue sur S, est appelé *problème de Dirichlet.*

842. Trouver la répartition stationnaire de la température dans une tige mince à surface latérale isolée si à ses extrémités

$$u|_{x=0}=u_0,\quad u|_{x=l}=u_l.$$

S o l u t i o n. Pour le cas unidimensionnel, le problème de Dirichlet consiste à trouver à partir de l'équation de Laplace $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ la fonction u satisfaisant aux conditions aux limites $u|_{x=0}=u_0$, $u|_{x=l}=u_l$. La solution générale de cette équation est de la forme $u=Ax+B$. Compte tenu des conditions aux limites, on a

$$u=\frac{u_l-u_0}{l}x+u_0,$$

ce qui signifie que la répartition stationnaire de la température dans une tige mince à surface latérale isolée est linéaire.

843. Trouver la répartition stationnaire de la chaleur dans l'espace compris entre deux cylindres d'axe commun Oz à condition que les surfaces des cylindres soient maintenues à une température constante.

Indication. Passer aux coordonnées cylindriques en supposant que u est indépendante de Θ et de z.

Réponse. $u = u_a + (u_b - u_a) \cdot \dfrac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}$.

§ 6. Problème de Dirichlet pour le disque

Soit un disque de rayon R centré sur le pôle O d'un système de coordonnées polaires. On va chercher une fonction $u(r, \Theta)$ harmonique dans ce disque et satisfaisant sur sa circonférence à la condition $u|_{r=R} = f(\Theta)$, où $f(\Theta)$ est une fonction donnée continue sur la circonférence. La fonction cherchée doit vérifier dans le disque l'équation de Laplace

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} = 0.$$

Lors de la résolution de ce problème, nous allons nous borner à l'utilisation de la méthode de Fourier. Supposons que l'on cherche la solution particulière sous la forme

$$u = Q(r) \cdot T(\Theta).$$

On a alors

$$r^2 \cdot Q''(r) \cdot T(\Theta) + r \cdot Q'(r) \cdot T(\Theta) + Q(r) \cdot T''(\Theta) = 0.$$

On sépare les variables

$$\frac{T''(\Theta)}{T(\Theta)} = -\frac{r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r)}{Q(r)}.$$

En égalant chacun des membres de l'égalité obtenue à la constante $-k^2$, on obtient deux équations différentielles ordinaires:

$$T''(\Theta) + k^2 \cdot T(\Theta) = 0,$$

$$r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r) - k^2 \cdot Q(r) = 0.$$

D'où, pour $k = 0$, on a

$$T(\Theta) = A + B\Theta, \tag{1}$$

$$Q(r) = C + D \ln r. \tag{2}$$

Mais si $k > 0$, alors

$$T(\Theta) = A \cos k\Theta + B \sin k\Theta \tag{3}$$

et la solution de la seconde équation sera cherchée sous la forme $Q(r) = r^m$, ce qui donne $r^2 m(m-1) r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0$, ou $r^m(m^2 - k^2) = 0$, c'est-à-dire $m = \pm k$.

Par conséquent,

$$Q(r) = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{4}$$

Remarquons que $u(r, \Theta)$ en tant que fonction de Θ est une fonction périodique de période 2π étant donné que pour une fonction uniforme les grandeurs $u(r, \Theta)$ et $u(r, \Theta + 2\pi)$ coïncident. Pour cette raison, de l'égalité (1) on tire $B = 0$,

alors que dans l'égalité (3) k peut prendre une des valeurs 1, 2, 3, . . . ($k > 0$). Ensuite, dans les égalités (2) et (4), il faut que $D = 0$, car autrement la fonction présenterait une discontinuité au point $r = 0$ et ne serait plus harmonique dans le disque. De cette façon, on a obtenu une infinité de solutions particulières de l'équation

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} = 0,$$

solutions continues dans le disque et qui peuvent s'écrire, en changeant quelque peu les notations, comme suit:

$$u_0(r, \Theta) = \frac{A_0}{2},$$

$$u_n(r, \Theta) = (A_n \cdot \cos n\Theta + B_n \cdot \sin n\Theta)\, r^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Etablissons maintenant la fonction

$$u(r, \Theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos n\Theta + B_n \cdot \sin n\Theta)\, r^n,$$

qui sera aussi une solution de l'équation de Laplace vu la linéarité et l'homogénéité de cette dernière. Il ne reste qu'à déterminer les valeurs de A_0, A_n, B_n de façon que cette fonction satisfasse à la condition

$$u\,|_{r=R} = f(\Theta),$$

c'est-à-dire

$$f(\Theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta) \cdot R^n.$$

On est ici en présence du développement de la fonction $f(\Theta)$ en série de Fourier dans le segment $[-\pi, \pi]$. Les formules bien connues donnent

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, d\tau, \qquad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \cos n\tau\, d\tau,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \sin n\tau\, d\tau.$$

Ainsi,

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \cos n(\tau - \Theta)\right] d\tau.$$

Simplifions le résultat obtenu. En posant $\frac{r}{R} = \rho$, $\tau - \Theta = t$, mettons l'expression entre crochets sous la forme

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cdot \cos nt = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot \cos nt - \frac{1}{2}.$$

Examinons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\rho \cdot e^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot \cos nt + i \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot \sin nt.$$

Cette série converge pour $\rho < 1$ et sa somme est

$$\frac{1}{1-\rho \cdot e^{it}} = \frac{1}{1-\rho \cdot \cos t - i\rho \sin t} = \frac{1-\rho \cos t + i\rho \sin t}{1-2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot \cos nt - \frac{1}{2} = \frac{1-\rho \cos t}{1-2\rho \cos t + \rho^2} - \frac{1}{2} = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho \cos t + \rho^2)}$$

ou bien, en revenant aux notations initiales,

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\tau - \Theta) + r^2} d\tau.$$

On a obtenu ainsi la solution du problème de Dirichlet pour le disque. L'intégrale figurant au deuxième membre est appelé *intégrale de Poisson.*

844. Trouver la répartition stationnaire de la température dans un disque mince homogène de rayon R dont la moitié supérieure est maintenue à une température de $+1°$ et celle inférieure, à $0°$.

Solution. Pour $-\pi < \tau < 0$, $f(\tau) = 0$; pour $0 < \tau < \pi$, $f(\tau) = 1$. La répartition de la température est donnée par l'intégrale

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\tau - \Theta) + r^2} d\tau.$$

Supposons que le point $(r; \Theta)$ se situe dans la moitié supérieure, c'est-à-dire $0 < \Theta < \pi$. Alors, $\tau - \Theta$ varie de $-\Theta$ à $\pi - \Theta$ et cet intervalle de longueur π ne comporte pas les points $\pm\pi$. Pour cette raison, procédons à la substitution:

$$\operatorname{tg} \frac{\tau - \Theta}{2} = t, \quad \cos(\tau - \Theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\tau = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

On a alors

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R-r)^2 + (R+r)^2 \cdot t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{R+r}{R-r} \cdot t \right) \Bigg|_{-\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)}{1-\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2}=-\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta},$$

ou

$$\operatorname{tg}(u\pi)=-\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}.$$

Vu que le deuxième membre est négatif, pour $0<\Theta<\pi$, u vérifie les inégalités $\frac{1}{2}<u<1$. Pour ce cas, on obtient la solution

$$\operatorname{tg}(\pi-u\pi)=\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta},$$

ou

$$u=1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}\quad(0<\Theta<\pi).$$

Si le point se trouve dans la moitié inférieure $\pi<\Theta<2\pi$, l'intervalle $(-\Theta,\ \pi-\Theta)$ de variation de $\tau-\Theta$ comporte le point $-\pi$ mais il ne comprend pas 0, ce qui nous permet d'effectuer la substitution :

$$\operatorname{ctg}\frac{\tau-\Theta}{2}=t,\quad \cos(\tau-\Theta)=\frac{t^2-1}{t^2+1},\qquad d\tau=-\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Alors, pour ces valeurs de Θ,

$$u(r,\ \Theta)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}}\frac{R^2-r^2}{(R+r)^2+(R-r)^2\cdot t^2}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)\right\}.$$

En effectuant des transformations analogues, on trouve

$$u=-\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}\quad(\pi<\Theta<2\pi).$$

Etant donné que le deuxième membre est positif ($\sin\Theta<0$), on a

$$0<u<\frac{1}{2}.$$

845. Trouver la solution de l'équation de Laplace pour la partie intérieure de la couronne $1\leqslant r\leqslant 2$ de façon que les conditions aux limites

$$u|_{r=1}=0,\quad u|_{r=2}=y.$$

soient satisfaites.

Indication. Passer aux coordonnées polaires.

Réponse. $u(r,\ \Theta)=\frac{8}{3}\operatorname{sh}(\ln r)\cdot\sin\Theta.$

CHAPITRE VII

ELÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

§ 1. Fonctions d'une variable complexe. Continuité

Admettons qu'une variable complexe $z = x + yi$ prenne toutes les valeurs possibles d'un certain ensemble Z. Si à chaque valeur de z de l'ensemble Z on peut mettre en correspondance une ou plusieurs valeurs d'une autre variable complexe $w = u + vi$, on dit que la variable complexe w est *fonction de* z dans le domaine Z, ce qui se note $w = f(z)$.

La fonction $w = f(z)$ est *uniforme* si à chaque valeur de z de l'ensemble Z on peut faire correspondre une seule valeur de w. S'il y a des valeurs de z à chacune desquelles correspondent plusieurs valeurs de w, la fonction $w = f(z)$ est appelée *multiforme*.

Si $w = u + vi$ est fonction de $z = x + yi$, chacune des variables u et v est fonction de x et de y, c'est-à-dire $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Inversement, si $w = u(x, y) + v(x, y)\,i$, où $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont des fonctions réelles de x et de y, on peut considérer w comme une fonction de la variable complexe $z = x + yi$. En effet, à chaque nombre complexe $z = x + yi$ il correspond un couple de nombres réels (x, y) et à ce couple on fait correspondre une ou plusieurs valeurs de w.

On dit que la fonction uniforme $w = f(z)$ possède une *limite* déterminée C pour $z \to c$ (C et c étant des nombres complexes) si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|z - c| < \delta$ entraîne l'inégalité $|f(z) - C| < \varepsilon$. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{z \to c} f(z) = C$.

La fonction $w = f(z)$ est *continue en un point* z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Si une fonction est continue en chaque point d'un certain domaine D, on dit qu'elle est *continue dans ce domaine*.

Considérons un domaine D borné par une ligne fermée Γ qui ne se coupe pas. On dit que ce domaine est *simplement connexe* (fig. 51).

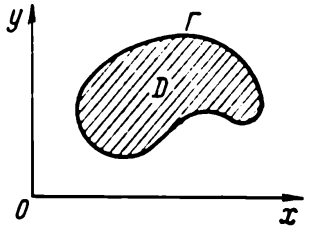

Fig. 51

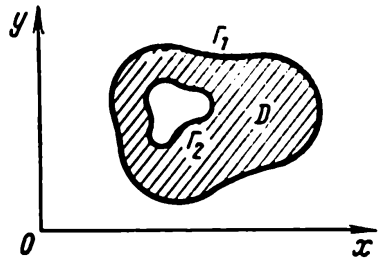

Fig. 52

Si le domaine D est borné par deux lignes fermées Γ_1 et Γ_2 qui ne s'entrecoupent et ne se coupent pas, on a affaire à un domaine *doublement connexe* (fig. 52).

Soient Γ_1 la ligne extérieure et Γ_2 la ligne intérieure. Le domaine sera doublement connexe même dans le cas, où la ligne Γ_2 dégénère en un point ou en un arc d'une ligne continue. D'une façon analogue, on peut définir les domaines triplement connexes ou, en général, m-connexes. Sur la figure 53 est représenté un domaine 4-connexe.

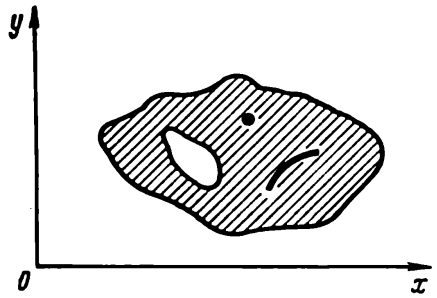

Fig. 53

Les fonctions d'une variable complexe e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ et $\operatorname{ch} z$ sont définies en tant que sommes des séries ci-dessous qui convergent dans tout le plan complexe:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots;$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots;$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots.$$

Les fonctions d'une variable complexe vérifient la *formule d'Euler*:

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

De cette formule on tire

$$\operatorname{sh} zi = i \sin z, \quad \operatorname{ch} zi = \cos z.$$

Les formules des mathématiques élémentaires

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2},$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

sont également valables pour les valeurs complexes des variables z_1 et z_2.

Les fonctions

$$z^{\frac{1}{n}} \text{ (n est un entier positif)}, \ \ln z,$$
$$\arcsin z, \ \arccos z \text{ et } \operatorname{arctg} z$$

sont les inverses des fonctions

$$z^n,\ e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Les fonctions $z^{\frac{1}{n}}$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$ et $\operatorname{arctg} z$ sont des fonctions multiformes.

On peut montrer que

$$\ln z = \ln \rho + (\varphi + 2k\pi)\, i \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots),$$

où $\rho = |z|$ et $\varphi = \arg z$.

846. On donne la fonction $w = z^2 + z$. Trouver les valeurs de cette fonction pour: a) $z = 1 + i$; b) $z = 2 - i$; c) $z = i$; d) $z = -1$.

Solution. On a

a) $w = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i$;
b) $w = (2 - i)^2 + 2 - i = 4 - 4i - 1 + 2 - i = 5\,(1 - i)$;
c) $w = i^2 + i = -1 + i$;
d) $w = 1 - 1 = 0$.

847. On donne la fonction $f(z) = x^2 + y^2 i$, où $z = x + yi$. Trouver: a) $f(1 + 2i)$; b) $f(2 - 3i)$; c) $f(0)$; d) $f(-i)$.

Solution. On a

a) $x = 1,\ y = 2,\ f(1 + 2i) = 1 + 4i$;
b) $x = 2,\ y = -3,\ f(2 - 3i) = 4 + 9i$;
c) $x = 0,\ y = 0,\ f(0) = 0 + 0 \cdot i = 0$;
d) $x = 0,\ y = -1,\ f(-i) = i$.

848. Montrer que la fonction $w = |z|$ est continue quelles que soient les valeurs de z.

Solution. Etant donné que la différence entre deux côtés d'un triangle n'est pas supérieure au troisième côté, on a

$$\big|\, |z| - |z_0| \,\big| \leqslant |z - z_0|$$

(fig. 54). Soit $0 < \delta < \varepsilon$. Alors de l'inégalité $|z - z_0| < \delta$ on tire

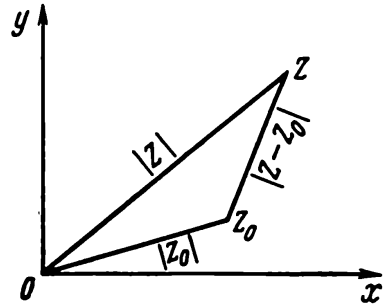

Fig. 54

l'inégalité $\big|\, |z| - |z_0| \,\big| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim\limits_{z \to z_0} |z| = |z_0|$. Il s'ensuit que $|z|$ est une fonction continue.

849. Montrer que $w = z^2$ est une fonction continue pour toute valeur de z.

Solution. On a $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Si $z \to z_0$, il existe un nombre positif M tel que les inégalités $|z| < M$, $|z_0| < M$ soient satisfaites. Mais

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| <$$
$$< |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < 2M\,|z - z_0|.$$

Posons $\delta < \frac{\varepsilon}{2M}$. De l'inégalité $|z - z_0| < \delta$ il résulte que

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M},$$

c'est-à-dire $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, c'est-à-dire $w = z^2$ est une fonction continue.

850. Trouver $\ln(\sqrt{3} + i)$.

Solution. On a

$$z = \sqrt{3} + i, \quad \rho = |z| = 2, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

851. Calculer $\cos\frac{i}{2}$ à 0,0001 près.

Solution. Vu que

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

on trouve

$$\cos\frac{i}{2} = 1 + \frac{1}{2\,!2^2} + \frac{1}{4\,!2^4} + \frac{1}{6\,!2^6} + \ldots; \qquad \cos\frac{i}{2} = 1{,}1276.$$

852. On donne la fonction $w = e^z$. Trouver ses valeurs pour: a) $z = \frac{\pi}{2} i$; b) $z = \pi(1 - i)$; c) $z = 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) i$, où k est un entier quelconque.

Réponse. a) $w = i$; b) $w = -e^{\pi}$; c) $w = ei$.

853. On donne la fonction $f(z) = \frac{1}{x - yi}$, où $z = x + yi$. Trouver $f(1 + i)$, $f(i)$, $f(3 - 2i)$.

Réponse. $\frac{1+i}{2}$, i, $\frac{3-2i}{13}$.

854. Montrer que $w = 2z^3$ est une fonction continue.

855. Trouver $\ln(1 - i)$.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln 2 + \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

856. Montrer que l'égalité ci-dessous est valable

$$\sin i \cdot \operatorname{ch} 1 = i \cos i \cdot \operatorname{sh} 1.$$

857. Résoudre l'équation $\cos z = 2$.

Réponse. $z = \pm i \ln (2 + \sqrt{3})$.

858. Trouver $\arcsin i$.

Réponse. $i \ln (1 \pm \sqrt{2})$.

859. Calculer $\sin i$ en déterminant les parties réelle et imaginaire à 0,0001 près.

Réponse. $1{,}1752i$.

860. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\right)$ en déterminant les parties réelle et imaginaire à 0,001 près.

Réponse. $0{,}772 + 1{,}018i$.

861. On donne la fonction $f(z) = e^{e^z}$. Trouver ses valeurs aux points : a) $z = i$; b) $z = 1 + \frac{\pi}{2} i$.

Réponse. a) $e^{\cos 1} [\cos (\sin 1) + i \sin (\sin 1)]$; b) $\cos e + i \sin e$.

§ 2. Dérivées des fonctions d'une variable complexe

On appelle *dérivée* d'une fonction d'une variable complexe $w = f(z)$ la limite du rapport $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, lorsque Δz tend vers zéro de n'importe quelle façon.

Ainsi,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Si la fonction admet une dérivée pour une valeur donnée de z, on dit qu'elle est *différentiable* (ou *monogène*) pour cette valeur de z. Si la fonction $w = f(z)$ est uniforme et si en chaque point d'un domaine D elle admet une dérivée finie, on dit qu'elle est *analytique* dans le domaine D.

Si la fonction $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ est différentiable en $z = x + yi$, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent en ce point et elles sont liées par les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

qui sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann*.

Les conditions de Cauchy-Riemann sont des conditions nécessaires de différentiabilité de la fonction $w = f(z)$ au point $z = x + yi$.

Inversement, si les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont continues au point $z = x + yi$ et que les conditions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont satisfaites, alors la fonction $w = f(z)$ est différentiable au point $z = x + yi$.

La dérivée de la fonction $f(z)$ est exprimée par les dérivées partielles des fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ d'après les formules

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les dérivées des fonctions élémentaires z^n, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{sh} z$ et $\operatorname{ch} z$ sont données par les formules:

$$(z^n)'=n\cdot z^{n-1}, \qquad (\arcsin z)'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$(e^z)'=e^z, \qquad (\arccos z)'=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$(\cos z)'=-\sin z, \qquad (\operatorname{arctg} z)'=\frac{1}{1+z^2},$$

$$(\sin z)'=\cos z, \qquad (\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z,$$

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}, \qquad (\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z.$$

862. Dire si la fonction $f(z) = y + xi$ est une fonction différentiable.

Solution. On trouve

$$u=y,\ v=x,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

L'une des conditions de Cauchy-Riemann n'est pas remplie, ce qui signifie que la fonction considérée n'est pas différentiable.

863. Est-ce que la fonction $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$ est une fonction différentiable?

Solution. On a

$$u=x^2-y^2,\ v=2xy;\ \frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x;\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites et, par conséquent, la fonction en question est différentiable. Etant donné que

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

alors

$$f'(z) = 2x + 2yi = 2(x + yi) = 2z.$$

La dérivée $f'(z)$ peut être trouvée d'une autre façon:

$$f(z) = (x + yi)^2 = z^2,\quad f'(z) = 2z.$$

864. La fonction $f(z) = e^x\cdot\cos y + i\cdot e^x\cdot\sin y$ est-elle différentiable?

Solution. On trouve

$$u = e^x \cdot \cos y, \quad v = e^x \cdot \sin y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites. D'où

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y =$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{yi} = e^{x+yi} = e^z,$$

ou autrement

$$f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{yi} = e^{x+yi} = e^z, \; f'(z) = e^z.$$

865. On donne la partie réelle $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$ d'une fonction différentiable $f(z)$, où $z = x + yi$. Trouver la fonction $f(z)$.

Solution. On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1$. Faisons appel à l'une des conditions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. De cette façon, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$. L'intégration donne

$$v(x, y) = 2xy - y + \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction arbitraire.

Utilisons maintenant l'autre condition de Cauchy-Riemann : $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Etant donné que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$$

alors

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - \varphi'(x).$$

D'après les données du problème on a $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$.

Donc

$$-2y - \varphi'(x) = -2y, \qquad \varphi'(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x) = C,$$

d'où

$$f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C),$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi - (x + yi) + Ci,$$

ou

$$f(z) = (x + yi)^2 - (x + yi) + Ci,$$

c'est-à-dire

$$f(z) = z^2 - z + C_1.$$

866. On donne la partie imaginaire $v(x, y) = x + y$ d'une fonction différentiable $f(z)$. Trouver cette fonction.

Solution. On a $v(x, y) = x + y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$; donc $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ (conformément à la condition de Cauchy-Riemann). D'où

$$u = x + \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

Mais $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Par conséquent, $\varphi'(y) = -1$. Par intégration, on obtient $\varphi(y) = -y + C$. D'où $u = x - y + C$. Donc,

$$f(z) = x - y + C + i(x + y),$$

ou

$$f(z) = (1 + i)(x + yi) + C,$$

c'est-à-dire

$$f(z) = (1 + i)z + C.$$

867. Est-ce que la fonction $f(z) = (x^2 + y^2) - 2xyi$ est différentiable?

Réponse. Non.

868. Montrer que la fonction

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

est différentiable et trouver sa dérivée.

Réponse. $f'(z) = 3z^2$.

869. Dire si la fonction

$$f(z) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y$$

est différentiable. Dans l'affirmative, trouver sa dérivée.

Réponse. $f'(z) = \cos z$.

870. Déterminer les fonctions réelles $\varphi(y)$ et $\psi(x)$ de façon que la fonction $f(z) = \varphi(y) + i\psi(x)$ soit différentiable.

Réponse.

$$\varphi(y) = ay + C_1, \quad \psi(x) = -ax + C_2,$$
$$f(z) = Az + C, \; A = -ai, \; C = C_1 + C_2.$$

871. Pour quelle valeur de λ la fonction $f(z) = y + \lambda xi$ est-elle différentiable?

Réponse. $\lambda = -1$, $f(z) = -iz$.

872. Pour quelle valeur de a la fonction $f(z) = a\bar{z}$ est-elle différentiable? ($\bar{z} = x - yi$).

Réponse. $a = 0$.

873. On donne la partie réelle $u = 2^x \cos(y \ln 2)$ d'une fonction différentiable $f(z)$. Trouver cette fonction.

Réponse. $f(z) = 2^z + C$.

874. On donne la partie imaginaire $v = \sin x \cdot \operatorname{sh} y$ d'une fonction différentiable $f(z)$. Trouver cette fonction.

Réponse. $f(z) = -\cos z + C$.

§ 3. Notions de représentation conforme

Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D. Donnons une valeur déterminée à $z = x + yi$ à laquelle il correspond une valeur bien déterminée de $w = u + vi$. Ainsi, à chaque point $(x; y)$ dans le plan xOy on met en correspondance un point déterminé $(u; v)$ dans le plan uOv.

Si le point $(x; y)$ décrit dans le plan xOy une certaine ligne Γ située dans le domaine D, alors le point $(u; v)$ décrira dans le plan uOv la ligne Γ' appelée *image* de la ligne Γ dans le plan uOv réalisée par la fonction analytique $w = f(z)$.

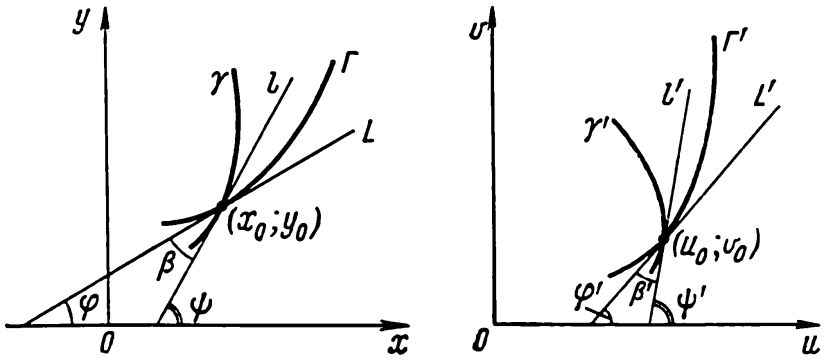

Fig. 55

Considérons un point $z_0 = x_0 + y_0 i$ situé sur la ligne Γ. A ce point il correspond un point $w_0 = u_0 + v_0 i$ qui se trouve sur la ligne Γ'. Menons respectivement les tangentes L et L' aux lignes Γ et Γ' aux points $(x_0; y_0)$ et $(u_0; v_0)$. Soit α l'angle de pivotement qu'il faut imposer à la droite L pour que son sens coïncide avec le sens de la droite L' (autrement dit, l'angle entre le sens primitif et celui obtenu par la transformation considérée). Dans la théorie des fonctions analytiques, on démontre que $\alpha = \arg f'(z_0)$ si $f'(z_0) \neq 0$.

Considérons maintenant une autre ligne γ qui passe également par le point $(x_0; y_0)$ et son image γ' qui passe par le point $(u_0; v_0)$. Soient l et l' respectivement les tangentes aux lignes γ et γ' aux points $(x_0; y_0)$ et $(u_0; v_0)$.

Dans ce cas aussi, pour faire coïncider le sens de la droite l avec le sens de la droite l', il faut tourner la première droite de l'angle α, car l'angle de rotation est égal à $f'(z_0)$ [la valeur de la dérivée ne dépend pas du choix de la courbe passant par le point $(x_0; y_0)$, ce qui est visible sur la figure 55].

Si φ est l'angle entre la tangente L et l'axe Ox,
ψ est l'angle entre la tangente l et l'axe Ox,
φ' est l'angle entre la tangente L' et l'axe Ou,
ψ' est l'angle entre la tangente l' et l'axe Ou,

alors $\varphi' - \varphi = \alpha$, $\psi' - \psi = \alpha$ et $\varphi' - \varphi = \psi' - \psi$. Par conséquent, $\psi - \varphi = \psi' - \varphi'$. Mais $\psi - \varphi$ est l'angle formé par les tangentes L et l, $\psi' - \varphi'$ étant l'angle entre les tangentes L' et l'.

On arrive ainsi à la conclusion que deux lignes arbitraires qui se coupent au point $(x_0;\ y_0)$ ont comme images deux lignes correspondantes concourantes au point $(u_0;\ v_0)$ de façon que l'angle β entre les tangentes aux lignes données et à leurs images soit conservé.

Il est aisé de démontrer que le module de la dérivée au point $(x_0;\ y_0)$, c'est-à-dire $|f'(z_0)|$, exprime la limite du rapport entre les distances qui séparent les points images $w_0 + \Delta w_0$ et w_0 et les points primitifs $z_0 + \Delta z_0$ et z_0 (fig. 56).

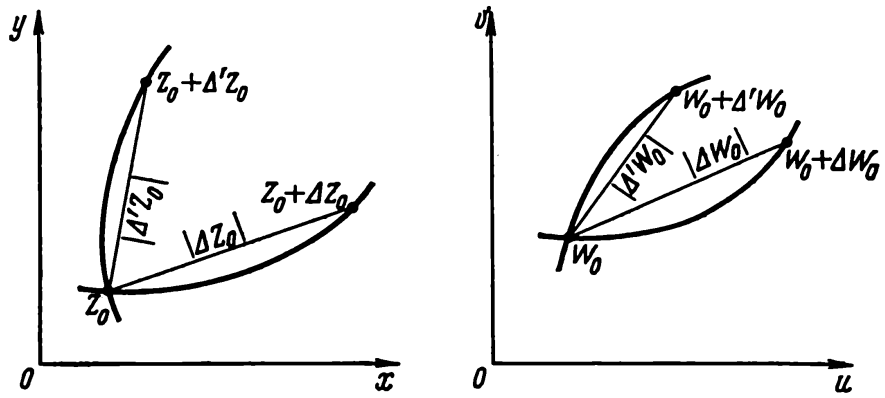

Fig. 56

En examinant l'autre courbe et son image, on arrive à la conclusion que $|f'(z_0)|$ exprime la limite du rapport des distances qui séparent les points images $w_0 + \Delta' w_0$ et w_0 et les points primitifs $z_0 + \Delta' z_0$ et z_0.

De cette façon, $|f'(z_0)|$ donne la mesure de la déformation de l'échelle au point z_0 lorsqu'on réalise la transformation par la fonction $w = f(z)$.

Ainsi, si l'on réalise la transformation d'un triangle infiniment petit du plan xOy sur le plan uOv par la fonction $w = f(z)$, on obtiendra un triangle curviligne infiniment petit semblable au triangle primitif par suite de l'égalité des angles correspondants et de la proportionnalité des côtés semblables (à la limite).

La transformation réalisée à l'aide de la fonction analytique $w = f(z)$ est appelée *transformation* ou *représentation conforme*.

875. Trouver les images obtenues par les transformations des points 1) (1; 1); 2) (0; —2); 3) (2; 0) réalisées par la fonction $w = \frac{1}{z}$ sur le plan uOv.

Solution. 1) Pour le point (1; 1), on a $z = 1 + i$; par conséquent,

$$w = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Dans le plan uOv, on a obtenu le point $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

2) $z = -2i$, $w = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$; on a obtenu le point $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

3) $z = 2$, $w = \frac{1}{2}$; on a obtenu le point $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$.

876. Trouver l'image obtenue par la transformation de la ligne $y = x$ réalisée par la fonction $w = z^3$ sur le plan uOv.

Solution. On a

$$w = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = \\ = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i.$$

De cette façon,

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2, \\ v = 3x^2y - y^3. \end{cases}$$

Eliminons x et y entre les équations obtenues et l'équation $y = x$

$$u = -2x^3, \ v = 2x^3, \text{ c.-à.-d. } v = -u.$$

Ainsi donc, l'image de la bissectrice du Ier et du IIIe quadrants dans le plan xOy est constituée par la bissectrice du IIe et du IVe quadrants dans le plan uOv.

877. Admettons que $w = z^2$ et que z décrive un carré défini par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Quel est le domaine décrit par w?

Solution. On a

$$w = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$
$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Trouvons les images des sommets du carré (fig. 57).

Si $x = 0$, $y = 0$, alors $u = 0$, $v = 0$;
Si $x = 0$, $y = 1$, alors $u = -1$, $v = 0$;
Si $x = 1$, $y = 0$, alors $u = 1$, $v = 0$;
Si $x = 1$, $y = 1$, alors $u = 0$, $v = 2$.

Trouvons les images des côtés du carré.

$OB: y = 0$, $u = x^2$, $v = 0$, c'est-à-dire $v = 0$, $u \geqslant 0$ (c'est le segment OB_1 de l'axe des abscisses Ou).

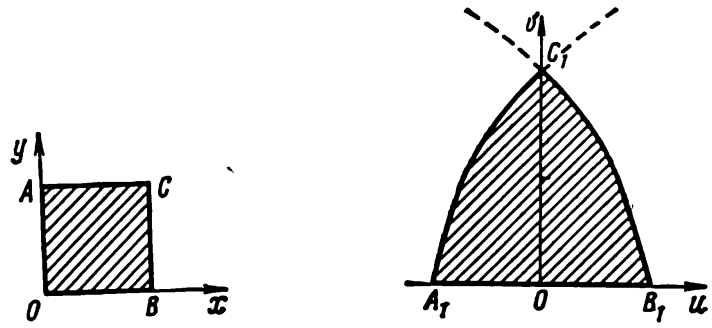

Fig. 57

$OA: x = 0$, $u = -y^2$, $v = 0$, c'est-à-dire $v = 0$, $u \leqslant 0$ (c'est le segment OA_1 de l'axe des abscisses Ou).

$AC: y = 1,\ u = x^2 - 1,\ v = 2x$; en éliminant x, on obtient $u = \frac{v^2}{4} - 1$ (c'est l'arc de parabole qui relie les points A_1 $(-1;\ 0)$ et C_1 $(0;\ 2)$.

$BC: x = 1,\ u = 1 - y^2,\ v = 2y$; en éliminant y, on obtient $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ (c'est l'arc de parabole qui joint les points B_1 $(1;\ 0)$ et C_1 $(0;\ 2)$.

On voit de cette façon que l'image du carré est constituée par un triangle curviligne borné par les lignes $v = 0$, $u = \frac{v^2}{4} - 1$, $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ et situé dans le demi-plan supérieur.

878. Trouver l'image obtenue par la transformation de la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ réalisée par la fonction $w = 2z + 1$ sur le plan uOv.

Solution. On a

$$w = 2(x + yi) + 1 = (2x + 1) + 2yi,$$

et l'on arrive au système

$$\begin{cases} u = 2x + 1, \\ v = 2y. \end{cases}$$

En substituant x et y ainsi trouvés dans l'équation de la circonférence, on obtient

$$x = \frac{u-1}{2}, \quad y = \frac{v}{2}.$$

Finalement on trouve

$$(u - 1)^2 + v^2 = 4.$$

L'image cherchée est une circonférence de rayon 2 et de centre O $(1;\ 0)$.

879. Trouver les images obtenues par les transformations des droites $x = 2$ et $y = 1$ réalisées par la fonction $w = z^2$ sur le plan uOv.

Réponse. $u = 4 - \frac{v^2}{16}$, $u = \frac{v^2}{4} - 1$.

880. Trouver l'image obtenue par la transformation de la droite $x + y = 1$ réalisée par la fonction $w = -z^2$ sur le plan uOv.

Réponse. $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$.

881. Trouver l'image obtenue par la transformation des axes de coordonnées réalisée par la fonction $w = iz + 1$ sur le plan uOv.

Réponse. $u = 1$, $v = 0$.

882. Expliquer le sens de l'image obtenue par la transformation réalisée par la fonction $w = e^{\varphi i}z$ (φ est une constante) sur le plan uOv.

Réponse. $u = x \cos \varphi - y \sin \varphi$; $v = x \sin \varphi + y \cos \varphi$ (c'est une transformation qui consiste dans la rotation des axes de coordonnées).

883. On donne la parabole $y = x^2$. Trouver l'image de cette parabole obtenue par la transformation réalisée par la fonction $w = z^2$ sur le plan uOv.

Réponse. $u = \left(\frac{v}{2}\right)^{2/3} - \left(\frac{v}{2}\right)^{4/3}$.

884. Montrer que l'angle fait par les droites $y = 1$ et $y = x - 1$ reste le même à la suite d'une transformation réalisée par la fonction

$$w = (1 + i)\, z + (1 - i).$$

§ 4. Intégrale par rapport à une variable complexe

On dit qu'une courbe Γ est *lisse* si la tangente à cette courbe varie d'une façon continue.

La courbe est appelée *lisse par morceaux* si elle est constituée par un nombre fini d'arcs lisses.

On donne une fonction d'une variable complexe $w = f(z)$ continue dans un certain domaine D. Soit Γ une courbe lisse quelconque située dans le domaine D. Considérons un arc d'origine z_0 et d'extrémité z de cette courbe. Divisons cet arc en n parties par les points arbitrairement choisis $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = z$ qui se suivent le long de la courbe Γ.

Etablissons la somme

$$S_n = f(z_0) \cdot \Delta z_0 + f(z_1) \cdot \Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1}) \cdot \Delta z_{n-1},$$

où $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Soit λ la plus grande des valeurs de $|\Delta z_k|$. Si $\lambda \to 0$, alors $n \to \infty$ et la somme S_n tend vers une limite déterminée. Cette limite est appelée *intégrale* de la fonction $f(z)$ le long de l'arc de la courbe Γ compris entre les points z_0 et z, c'est-à-dire

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \lim_{\lambda \to 0} [f(z_0) \cdot \Delta z_0 + f(z_1) \cdot \Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1}) \cdot \Delta z_{n-1}].$$

Si $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, alors l'intégrale $\int_\Gamma f(z)\, dz$ se ramène à deux intégrales curvilignes des fonctions réelles d'après la formule

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Gamma u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy + i \int_\Gamma v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy.$$

Si Γ est une courbe lisse par morceaux constituée par les portions lisses $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, alors l'intégrale le long de cette courbe peut être trouvée à l'aide de l'égalité

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz + \ldots + \int_{\Gamma_m} f(z)\, dz.$$

Si $f(z)$ est une fonction analytique dans un domaine simplement connexe D, la valeur de l'intégrale $\int_\Gamma f(z)\, dz$ prise le long d'une courbe lisse par morceaux

arbitraire Γ appartenant au domaine D ne dépend pas de la forme de cette courbe, n'étant fonction que des positions occupées par son origine et son extrémité.

Pour toute fonction $f(z)$ analytique dans un certain domaine simplement connexe D, l'intégrale $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ prise sur n'importe quel contour fermé lisse par morceaux γ situé dans le domaine D est nulle (théorème de Cauchy).

Examinons l'expression $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$. Ici, le chemin d'intégration est représenté par une courbe lisse par morceaux arbitraire Γ qui se trouve dans le domaine D et qui relie les points z et z_0. On suppose que la fonction $f(t)$ est analytique dans le domaine D. On peut montrer sans difficulté que $F'(z) = f(z)$. La fonction $F(z)$ dont la dérivée est égale à $f(z)$ est appelée fonction *primitive* par rapport à la fonction $f(z)$. Si l'une des primitives $F(z)$ est connue, toutes les autres sont contenues par l'expression $F(z) + C$, où C est une constante arbitraire. L'expression $F(z) + C$ est appelée *intégrale indéfinie* de la fonction $f(z)$. Tout comme pour les fonctions réelles, l'égalité ci-dessous reste valable

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

(la formule de Newton-Leibniz), où $\Phi(z)$ est une fonction primitive quelconque par rapport à la fonction $f(z)$.

Pour trouver la primitive par rapport à une fonction analytique $f(z)$, on utilise les formules d'intégration habituelles.

Considérons $n+1$ courbes lisses par morceaux fermées $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et telles que chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ se situe en dehors des autres, toutes ces courbes se trouvant à l'intérieur de γ_0. L'ensemble des points situés simultanément à l'intérieur de γ_0 et en dehors de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ constitue le domaine $(n+1)$-connexe D.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le domaine D (on inclut les valeurs qu'elle prenne sur les contours $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$). Dans ce cas, l'égalité ci-dessous est vraie

$$\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

885. Calculer l'intégrale

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz,$$

où $f(z) = (y+1) - xi$, AB étant le segment rectiligne qui joint les points $z_A = 1$ et $z_B = -i$.

Solution. On a $u = y + 1$, $v = -x$. D'où

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} (y+1)\,dx + x\,dy - i\int\limits_{AB} x\,dx - (y+1)\,dy =$$

$$= (y+1)\cdot x\Big|_{x=1,\ y=0}^{x=0,\ y=-1} - i\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^0 + i\cdot\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_0^{-1} =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -1.$$

On peut procéder d'une autre manière. On voit sans difficulté que $f(z) = 1 - iz$ et

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{1}^{-i} (1-iz)\,dz = \frac{(1-iz)^2}{-2i}\Big|_{1}^{-i} = \frac{(1+i^2)^2}{-2i} + \frac{(1-i)^2}{2i} =$$

$$= \frac{1-2i+i^2}{2i} = -1.$$

886. Calculer l'intégrale $\int_{AB} f(z)\,dz$, où $f(z) = x^2 + y^2 i$, AB étant le segment rectiligne qui joint les points $A\ (1+i)$ et $B\ (2+3i)$.

Solution. On a $u = x^2$, $v = y^2$; donc

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} x^2\,dx - y^2\,dy + i\int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy.$$

Etant donné que l'expression $x^2\,dx - y^2 dy$ représente la différentielle totale, la première intégrale du deuxième membre de l'égalité est calculée en tant qu'intégrale définie:

$$\int_{AB} x^2\,dx - y^2\,dy = \int_{1}^{2} x^2\,dx - \int_{1}^{3} y^2\,dy = \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_{1}^{3} = \frac{7}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{19}{3}.$$

Pour calculer la seconde intégrale, établissons l'équation de la droite AB:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{2-1} \text{ c'est-à-dire } y = 2x - 1.$$

D'où $dy = 2dx$ et

$$\int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_{1}^{2} [(2x-1)^2 + 2x^2]\,dx = \int_{1}^{2} (6x^2 - 4x + 1)\,dx =$$

$$= (2x^3 - 2x^2 + x)\,|_{1}^{2} = 10 - 1 = 9.$$

Donc, $\int_{AB} f(z)\,dz = -\frac{19}{3} + 9i.$

887. Calculer l'intégrale $\int_{i}^{1+i} z\,dz.$

Solution. La fonction figurant sous le signe d'intégration est une fonction analytique. En appliquant la formule de Newton-Leibniz, on a:

$$\int_{i}^{1+i} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_{i}^{1+i} = \frac{1}{2}[(1+i)^2 - i^2] = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1 + 1) = \frac{1}{2} + i.$$

888. Calculer $\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz$, où γ est le contour fermé

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Solution. Etant donné que $\bar{z} = x - yi$, $dz = dx + i\,dy$,

$$\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz = \int\limits_{\gamma} x\,dx + y\,dy + i \int\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx.$$

La première intégrale du deuxième membre est nulle en tant qu'intégrale de la différentielle totale prise le long d'un contour fermé.

Lors du calcul de la seconde intégrale, il faut avoir en vue que $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$. D'où

$$x\,dy - y\,dx = \cos^2 t\,dt + \sin^2 t\,dt = dt$$

et finalement on obtient

$$\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz = i \int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

889. Calculer l'intégrale $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-4}$, où γ est l'ellipse $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

Solution. La fonction $f(z) = \frac{1}{z-4}$ est analytique dans le domaine borné par l'ellipse donnée, donc $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-4} = 0$.

890. Calculer l'intégrale $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-(1+i)}$, où γ est la circonférence $|z-(i+1)| = 1$.

Solution. L'équation de la circonférence peut s'écrire $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, ou $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \sin t$, ou $z = 1 + i + e^{ti}$. Dans le domaine borné par la courbe γ, la fonction $f(z) = \frac{1}{z-(1+i)}$ ne sera pas analytique vu qu'au point $z = 1 + i$, qui représente le centre de la circonférence γ, la fonction devient infinie.

Etant donné que $dz = i \cdot e^{it}\,dt$, on a

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-(1+i)} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it}} = i \int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

891. Calculer l'intégrale $\int\limits_{\gamma} \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}\,dz$, où γ est la circonférence $|z|=2$.

Solution. La fonction $f(z)=\frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}$ figurant sous le signe d'intégration présente des discontinuités seulement aux points $z=1$ et $z=i$. La fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine

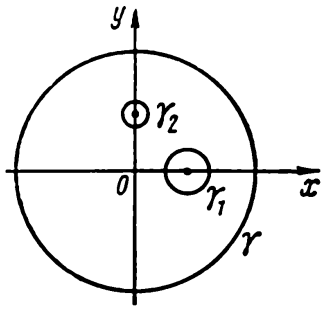

Fig. 58

triplement connexe représenté par le disque borné par la circonférence γ duquel on retranche deux disques $|z-1|<r$, $|z-i|<r$, où $r>0$ est une grandeur suffisamment petite (fig. 58).

Par conséquent,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

où γ_1 et γ_2 sont respectivement les circonférences $|z-1|=r$ et $|z-i|=r$.

Vu que

$$f(z)=\frac{z-1+z-i}{(z-1)\cdot(z-i)}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-1},$$

alors

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{z-i}+\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{z-1}+\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{z-i}+\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{z-1}.$$

Le premier et le quatrième termes du deuxième membre sont nuls en vertu de l'analycité des fonctions à intégrer dans les domaines correspondants.

Donc,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{z-1}+\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{z-i}.$$

Les circonférences γ_1 et γ_2 sont respectivement d'équations $z = 1 + r \cdot e^{i\varphi}$ et $z = i + r \cdot e^{i\varphi}$ D'où

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} + \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} = 4\pi i.$$

892. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma f(z)\,dz$ si $f(z) = y + xi$, Γ étant la ligne brisée OAB de sommets $z_O = 0$, $z_A = i$, $z_B = 1 + i$.

Réponse. $1 + i$.

893. Calculer l'intégrale $\int_{AB} z^2\,dz$ si AB est un segment rectiligne qui joint les points $z_A = 1$ et $z_B = i$.

Réponse. $-\frac{1}{3}(1+i)$.

894. Calculer l'intégrale $\int_\gamma z^{10}\,dz$, où γ est l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Réponse. 0.

895. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$, où γ est la circonférence $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Réponse. 0.

896. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, où γ est la circonférence $z = e^{ti}$.

Réponse. $2\pi i$.

897. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{(a+b)z - az_1 - az_2}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$, où γ représente le disque $|z| \leqslant R$, z_1 et z_2 étant des points intérieurs à ce disque et tels que $z_1 \neq z_2$.

Réponse. $2\pi i\,(a + b)$.

§ 5. Séries de Taylor et de Laurent

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un certain voisinage d'un point a. Considérons la série

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \ldots$$

C'est le développement en *série de Taylor* de la fonction $f(z)$. A l'intérieur de son disque de convergence, cette série exprime la fonction $f(z)$, ce qui signifie que dans le disque de convergence l'égalité

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots$$

est satisfaite. Si $a = 0$, l'égalité ci-dessus va s'écrire

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} z^3 + \ldots$$

Dans ce cas, on dit que la fonction $f(z)$ est développée en *série de Maclaurin.*

Considérons maintenant les deux séries suivantes:

$$\frac{A_{-1}}{z-a} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \ldots \tag{1}$$

et

$$A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + A_3(z-a)^3 + \ldots \tag{2}$$

Le domaine de convergence (s'il y en a un) de la première série est défini par l'inégalité $|z-a| > r$. Dans le cas où il y a un domaine de convergence de la seconde série, ce domaine sera défini par l'inégalité $|z-a| < R$. Alors, si $r < R$, la série

$$\ldots + \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} +$$
$$+ A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + A_3(z-a)^3 + \ldots,$$

obtenue par l'addition des séries (1) et (2), aura comme domaine de convergence

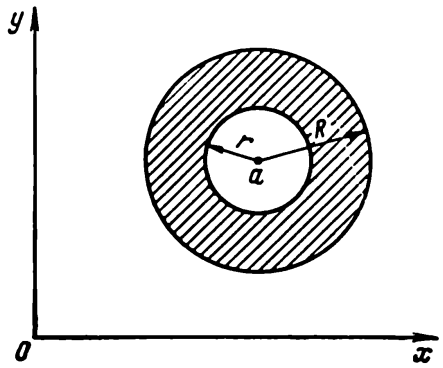

Fig. 59

la couronne $r < |z-a| < R$ bornée par deux circonférences concentriques de centre a et de rayons r et R (fig. 59).

Soit $f(z)$ une fonction uniforme et analytique dans une couronne

$$r < |z-a| < R.$$

Dans cette couronne, la fonction $f(z)$ peut être représentée par la somme de la série suivante

$$f(z) = \ldots + \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) +$$
$$+ A_2(z-a)^2 + A_2(z-a)^3 + \ldots$$

La série figurant dans le deuxième membre de cette égalité est appelée *série de Laurent* de la fonction $f(z)$. Les coefficients de la série de Laurent peuvent être calculés par la formule

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$(n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

La série

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\dots$$

est appelée *partie principale* de la série de Laurent, alors que la série

$$A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\dots$$

s'appelle *partie régulière* de la série de Laurent. Si la série de Laurent comporte une partie principale, a est un *point singulier isolé*. Dans le cas où la partie principale de la série de Laurent contient un nombre fini de termes, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\dots+\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}\ (A_{-n}\neq 0),$$

le point singulier isolé a est appelé *pôle d'ordre n* de la fonction $f(z)$. On dit alors que le coefficient A_{-1} est le *résidu* de la fonction $f(z)$ relatif au pôle a.

898. Développer en série de Taylor la fonction $f(z)=z^5$, suivant les puissances du binôme $z-i$.

Solution. On trouve les dérivées de la fonction $f(z)=z^5$:

$$f'(z)=5z^4,\ f''(z)=20z^3,\ f'''(z)=60z^2,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(z)=120z,\ f^{\mathrm{V}}(z)=120,\ f^{\mathrm{VI}}(z)=f^{\mathrm{VII}}(z)=\dots=0.$$

On détermine les valeurs des dérivées au point $a=i$:

$$f(i)=i,\ f'(i)=5,\ f''(i)=-20i,\ f'''(i)=-60,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(i)=120i,\ f^{\mathrm{V}}(i)=120.$$

D'où

$$f(z)=i+5(z-i)-10i(z-i)^2-10(z-i)^3+$$
$$+5i(z-i)^4+(z-i)^5.$$

On voit ainsi que la série de Taylor de la fonction $f(z)=z^5$ est un polynôme du cinquième degré.

899. Développer en série de Taylor la fonction $f(z)=\operatorname{ch}(1-z)$ suivant les puissances du binôme $z-\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$.

Solution. On trouve

$$f(z)=\operatorname{ch}(1-z),\qquad f(a)=\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}i=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$f'(z)=-\operatorname{sh}(1-z),\quad f'(a)=-\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}i=-i\sin\frac{\pi}{2}=-i,$$

$$f''(z)=\operatorname{ch}(1-z),\qquad f''(a)=0,$$

$$f'''(z)=-\operatorname{sh}(1-z),\quad f'''(a)=-i.$$

Par conséquent,

$$f(z)=-i\left[\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)+\frac{1}{3!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^3+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^5+\dots\right].$$

900. Etudier la convergence de la série

$$\ldots + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} +$$
$$+ 1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \ldots$$

Solution. Considérons les deux séries suivantes

$$\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \ldots, \tag{1}$$

$$1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \ldots \tag{2}$$

Si l'on pose $z-1=\frac{1}{z'}$ dans la série (1), on obtient la série entière

$$\frac{z'}{2} + \frac{z'^2}{2^2} + \frac{z'^3}{2^3} + \ldots \tag{1'}$$

On détermine le rayon de convergence de cette série d'après le critère de d'Alembert:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^n}} = 2.$$

Donc, la série entière (1') converge si $|z'| < 2$. Par conséquent, la série (1) converge si $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 2$, d'où l'on tire $|z-1| > \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la série (1) converge en dehors du disque de rayon $r = \frac{1}{2}$ et de centre $z = 1$. On détermine le rayon de convergence de la série (2):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5^{n-1}}}{\frac{1}{5^n}} = 5.$$

De cette façon, le domaine de convergence de la série (2) est défini par l'inégalité $|z-1| < 5$.

On arrive à la conclusion que le domaine de convergence de la série donnée est la couronne $\frac{1}{2} < |z-1| < 5$.

La solution de ce problème peut être simplifiée si l'on remarque que les séries (1) et (2) sont des progressions géométriques dont les raisons sont respectivement $\frac{1}{2(z-1)}$ et $\frac{z-1}{5}$. Elles convergent si

$$\left|\frac{1}{2(z-1)}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{z-1}{5}\right| < 1.$$

Par conséquent, $|z-1|>\frac{1}{2}$ et $|z-1|<5$. Donc, le domaine de convergence se présente sous la forme d'une couronne définie par la double inégalité $\frac{1}{2}<|z-1|<5$.

901. Etudier la convergence de la série

$$\ldots+\frac{(3+4i)^3}{z^3}+\frac{(3+4i)^2}{z^2}+\frac{3+4i}{z}+1+\frac{z}{i}+\frac{z^2}{i^2}+\frac{z^3}{i^3}+\ldots$$

Solution. Considérons les deux séries suivantes:

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{(3+4i)^2}{z^2}+\frac{(3+4i)^3}{z^3}+\ldots; \tag{1}$$

$$1+\frac{z}{i}+\frac{z^2}{i^2}+\frac{z^3}{i^3}+\ldots \tag{2}$$

Les séries (1) et (2) sont des progressions géométriques dont les raisons sont respectivement $\frac{3+4i}{z}$ et $\frac{z}{i}$. Elles convergent si

$$\left|\frac{3+4i}{z}\right|<1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{z}{i}\right|<1.$$

Etant donné que $|3+4i|=\sqrt{9+16}=5$, $|i|=1$, alors

$$\frac{5}{|z|}<1 \quad \text{et} \quad |z|<1,$$

ou

$$|z|>5 \text{ et } |z|<1.$$

Mais ces deux inégalités sont incompatibles, ce qui signifie que la série donnée ne converge en aucun point du plan.

902. Développer en série de Laurent la fonction $f(z)=\frac{1}{2z-5}$ suivant les puissances de z dans le voisinage du point $z=0$.

Solution. Mettons la fonction $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{2z}{5}}.$$

Dans le voisinage du point $z=0$, l'inégalité $\left|\frac{2z}{5}\right|<1$ est vérifiée; c'est pourquoi la fraction $\frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{2z}{5}}$ peut être présentée sous la forme de la somme d'une progression géométrique infiniment décroissante de raison $q=\frac{2z}{5}$ et dont le premier terme $a=-\frac{1}{5}$.

D'où l'on obtient

$$f(z) = -\frac{1}{5} - \frac{2z}{5^2} - \frac{2^2z^2}{5^3} - \frac{2^3z^3}{5^4} - \ldots$$

Ce développement en série de Laurent peut s'écrire

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}z^{n-1}}{5^n}.$$

On voit que ce développement ne comporte que la partie régulière. L'inégalité $\left|\frac{2z}{5}\right| < 1$ montre que le domaine de convergence de la série est le disque $|z| < \frac{5}{2}$.

903. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{1}{2z-5}$$

suivant les puissances de z dans le voisinage du point $z = \infty$.

Solution. On a

$$f(z) = \frac{1}{2z-5} = \frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{5}{2z}}.$$

Dans le voisinage du point $z = \infty$, l'inégalité $\left|\frac{5}{2z}\right| < 1$ est vérifiée, donc $f(z)$ peut être présentée sous la forme de la somme d'une progression géométrique infiniment décroissante dont le premier terme $a = \frac{1}{2z}$ et la raison $q = \frac{5}{2z}$. Par conséquent,

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{5^2}{2^2z^2} + \frac{5^2}{2^3z^3} + \frac{5^3}{2^4z^4} + \ldots,$$

ou

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{2^nz^n}.$$

Le développement ne comporte pas de partie régulière. La série converge dans le domaine $|z| > \frac{5}{2}$ (en dehors du disque).

904. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

suivant les puissances de z dans la couronne $1 < |z| < 3$.

Solution. Décomposons la fonction $f(z)$ en éléments simples

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3},$$

d'où

$$1 = A(z-3) + B(z-1).$$

En posant $z = 1$, on obtient $1 = -2A$, c'est-à-dire $A = -\frac{1}{2}$. Si l'on pose $z = 3$, on a $1 = 2B$, donc $B = \frac{1}{2}$. De cette façon,

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Compte tenu du fait que $1 < |z| < 3$, on peut écrire

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z}{3}}.$$

Par conséquent,

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^n}\right).$$

905. Développer en série de Laurent la fonction $f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2}$ suivant les puissances de $z-2$.

Solution. On pose $z-2 = z'$. Alors

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2} = \frac{(z'+2)^4}{z'^2} = \frac{z'^4+8z'^3+24z'^2+32z'+16}{z'^2} =$$

$$= \frac{16}{z'^2} + \frac{32}{z'} + 24 + 8z' + z'^2,$$

c'est-à-dire

$$f(z) = \frac{16}{(z-2)^2} + \frac{32}{z-2} + 24 + 8(z-2) + (z-2)^2.$$

Ici, la partie principale comporte deux termes, alors que la partie régulière en possède trois. Vu que le développement est constitué par un nombre fini de termes, il sera valable pour tout point du plan excepté le point $z = 2$. Ce point est un pôle d'ordre 2 de la fonction $f(z)$. Le résidu de cette fonction relatif au pôle $z = 2$ est représenté par le coefficient de $(z-2)^{-1}$, c'est-à-dire qu'il est égal à 32.

906. Etudier la convergence de la série

$$\ldots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots$$

Réponse. Le domaine de convergence est $1 < |z| < 2$.

907. Etudier la convergence de la série

$$\ldots + \frac{4}{z^4} + \frac{3}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots$$

Réponse. La série diverge en tout point du plan.

908. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

suivant les puissances de z dans les domaines suivants:

a) le voisinage du point $z = 0$; b) le voisinage du point $z = \infty$.

Réponse. a) $f(z) = -z^2 - z^3 - z^4 - \ldots$;

$$\text{b) } f(z) = z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots$$

909. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} z - z}{z^5} & \text{si } z \neq 0; \\ \infty & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Réponse. $\frac{1}{3!\,z^2} + \frac{1}{5!} + \frac{z^2}{7!} + \frac{z^4}{9!} + \ldots$

910. Trouver les pôles de la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}.$$

Réponse. ± 1 pôles d'ordre 1 (pôles simples); $\pm i$ pôles d'ordre 2.

En général, si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes qui n'ont pas des racines communes, les racines du polynôme $Q(z)$ (et seulement ces racines) sont des pôles de la fonction $f(z)$.

L'ordre des pôles de la fonction $f(z)$ coïncide avec la multiplicité des racines correspondantes du polynôme $Q(z)$. Ainsi, par exemple, si

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-i)(z-1)^2(z-2)^3},$$

alors $z_1 = i$ est un pôle simple de $f(z)$ (pôle d'ordre 1); $z_2 = 1$ est un pôle d'ordre 2; $z_3 = 2$ est un pôle d'ordre 3.

911. Développer en série de Taylor la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ suivant les puissances de $z-1$. Trouver le domaine de convergence de cette série.

Réponse. $f(z) = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \ldots$ Le domaine de convergence est $|z-1| < 1$.

912. Développer en série de Maclaurin la fonction

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos z}{z^2} & \text{si } z \neq 0; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Réponse. $f(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots$ La série converge dans tout le plan.

913. Développer en série de Laurent la fonction $f(z)=2^z+$ $+2^{\frac{1}{z}}-2$ définie dans tout le plan à l'exception du point $z=0$.

Réponse. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}(z^n+z^{-n})$.

§ 6. Calcul des résidus des fonctions. Utilisation des résidus pour le calcul des intégrales

Soit a un pôle d'ordre n d'une fonction $f(z)$. Au paragraphe 5 on a donné la définition du résidu de la fonction $f(z)$ relatif à son pôle a. *Le résidu de la fonction $f(z)$ relatif à son pôle a d'ordre n se calcule d'après la formule*

$$\operatorname*{Res}_a f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}[(z-a)^n\cdot f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

Si a est un pôle d'ordre 1 de la fonction $f(z)$, son résidu sera

$$\operatorname*{Res}_a f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D, excepté un nombre fini de pôles $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Désignons par γ un contour fermé lisse par morceaux arbitraire à l'intérieur duquel se situent les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et qui se trouve entièrement dans le domaine D. Dans ce cas, $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$ sera égale à la *somme des résidus de la fonction $f(z)$ relatifs aux pôles $a_1, a_2, \ldots, a_k$ multipliée par $2\pi i$*, c'est-à-dire

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{a_j} f(z)$$

(théorème fondamental des résidus).

Examinons un cas particulier. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D et supposons que a appartienne à ce domaine et que $f(a)\neq 0$.

Dans ce cas, la fonction $F(z)=\frac{f(z)}{z-a}$ possède du point a du domaine D un pôle d'ordre 1. Trouvons maintenant le résidu de la fonction $F(z)$ relatif au pôle a:

$$\operatorname*{Res}_a F(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot F(z)=\lim_{z\to a}f(z)=f(a).$$

D'où, en appliquant le théorème fondamental des résidus, on obtient

$$\int\limits_\gamma F(z)\,dz=2\pi i f(a),$$

ou

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a).$$

La formule obtenue, appelée formule de Cauchy, joue un rôle important dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Il faut quand même remarquer que la déduction de la formule de Cauchy doit précéder la démonstration du théorème fondamental des résidus. Ici, nous avons saisi l'occasion pour présenter au lecteur cette importante formule.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le demi-plan supérieur y compris l'axe réel, un nombre fini de pôles a_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) situés au-dessus de l'axe réel étant exclus. On suppose en outre que le produit $z^2 f(z)$ pour $z \to +\infty$ ait une limite finie. Dans ce cas, *pour calculer l'intégrale définie* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *de la fonction d'une variable réelle*, on utilise la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_m),$$

où r_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) est le résidu de la fonction $f(z)$ relatif au pôle a_k.

914. Trouver les résidus de la fonction $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$.

Solution. Les pôles de cette fonction se situent aux points $z = 1$ et $z = 3$.

$$\operatorname*{Res}_{1} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \lim_{z\to 1}\frac{z}{z-3} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{3} f(z) = \lim_{z\to 3} (z-3)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \lim_{z\to 3}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{2}.$$

915. Trouver les résidus de la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$.

Solution. On a

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z+2i)}.$$

Les pôles de la fonction sont $2i$ et $-2i$:

$$\operatorname*{Res}_{2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} (z-2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{z+2i} = \frac{4}{4i} = -\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{-2i} f(z) = \lim_{z\to -2i} (z+2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to -2i}\frac{1}{z-2i} = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}.$$

916. Trouver les résidus de la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2-2z+5}$.

Solution. Les pôles de la fonction sont représentés par les racines du dénominateur: $z = 1 \pm 2i$. Par conséquent,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}.$$

On trouve

$$\operatorname*{Res}_{1+2i} f(z) = \lim_{z\to 1+2i}\frac{z-1-2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)} = \lim_{z\to 1+2i}\frac{1}{z-1+2i} = -\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{1-2i} f(z) = \lim_{z\to 1-2i}\frac{z-1+2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)} = \lim_{z\to 1-2i}\frac{1}{z-1-2i} = \frac{i}{4}.$$

917. Trouver le résidu de la fonction $f(z)=\frac{z^2}{(z-2)^3}$.

Solution. Etant donné que $z=2$ est un pôle d'ordre 3, on a

$$\operatorname*{Res}_2 f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2\left[\frac{z^2}{(z-2)^3}\cdot(z-2)^3\right]}{dz^2}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2(z^2)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\cdot 2=1.$$

918. Trouver le résidu de la fonction $f(z)=\frac{1}{1-\cos z}$ par rapport à son pôle $z=0$.

Solution. Le point $z=0$ est un pôle d'ordre 2. En effet,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\sin z}=2$$

est une grandeur finie. Alors,

$$\operatorname*{Res}_0 f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-z^2\sin z}{(1-\cos z)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2z\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots\right)-z^2\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)}{\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots\right)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-\frac{1}{3}z^5}{\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots\right)^2}=0.$$

919. Trouver $\int\limits_\gamma \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\,dz$, où γ est un contour fermé à l'intérieur duquel on trouve les pôles $z=1$, $z=2$, $z=3$.

Solution. Déterminons le résidu de la fonction figurant sous le signe d'intégration :

$$\operatorname*{Res}_1 f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z+1}{(z-2)(z-3)}=1,$$

$$\operatorname*{Res}_2 f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z+1}{(z-1)(z-3)}=-3,$$

$$\operatorname*{Res}_3 f(z)=\lim_{z\to 3}\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}=2.$$

Par conséquent,

$$\int\limits_\gamma \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\,dz=2\pi i\,(1-3+2)=0.$$

920. Trouver $\int\limits_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}\,dz$, où γ est la circonférence $|z|=3$.

Solution. On a $f(z)=\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}$. Les pôles i, $-i$, 2 se trouvent à l'intérieur du contour fermé γ. D'où

$$\operatorname*{Res}_{i} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-2)}=\frac{1}{2i(2-i)},$$

$$\operatorname*{Res}_{-i} f(z)=\lim_{z\to -i}(z+i)\cdot f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z-2)}=-\frac{1}{2i(2+i)},$$

$$\operatorname*{Res}_{2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)\cdot f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z^2}{z^2+1}=\frac{4}{5};$$

$$\int_{\gamma}\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}\,dz=2\pi i\left[\frac{1}{2i(2-i)}-\frac{1}{2i(2+i)}+\frac{4}{5}\right]=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2-i}-\frac{1}{2+i}+\frac{8}{5}i\right)=\pi\left(\frac{2}{5}i+\frac{8}{5}i\right)=2\pi i.$$

921. Calculer l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Solution. La fonction $\frac{1}{(z^2+4)^2}$ est analytique dans le demi-plan supérieur excepté le pôle $2i$. En outre,

$$\lim_{|z|\to+\infty} z^2 f(z)=\lim_{|z|\to+\infty}\frac{z^2}{(z^2+4)^2}=0,$$

c'est-à-dire la limite a une valeur finie.

On détermine le résidu de la fonction $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)^2}$ relatif au pôle d'ordre 2 donné $2i$:

$$\operatorname*{Res}_{2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2i)^2}\right]=\lim_{z\to 2i}=\frac{2}{(z+2i)^3}=\frac{2}{64i}=-\frac{1}{32}i.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{32}i\right)=\frac{\pi}{16}.$$

922. Trouver $\int_{\gamma}\frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, si :

1) γ est la circonférence $|z|=1$;
2) γ est la circonférence $|z|=3$;
3) γ est la circonférence $|z|=5$.

S o l u t i o n. Trouvons les résidus de la fonction figurant sous le signe d'intégration relatifs aux pôles $z = 0$, $z = -2$, $z = -4$.

$$\operatorname*{Res}_{0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{8},$$

$$\operatorname*{Res}_{-2} f(z) = \lim_{z\to -2} (z+2)\cdot f(z) = \lim_{z\to -2} \frac{1}{z(z+4)} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{-4} f(z) = \lim_{z\to -4} (z+4)\cdot f(z) = \lim_{z\to -4} \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{8}.$$

1er c a s: γ est la circonférence $|z| = 1$. A l'intérieur du contour on ne trouve que le pôle $z = 0$. Alors,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

2e *c a s*: γ est la circonférence $|z| = 3$. A l'intérieur du contour se trouvent les pôles $z = 0$ et $z = -2$. Alors,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{4}.$$

3e *c a s*: γ est la circonférence $|z| = 5$. A l'intérieur du contour se situent trois pôles $z = 0$, $z = -2$, $z = -4$. Alors,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0.$$

923. Trouver le résidu de la fonction $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.

Réponse. $2i$.

924. Trouver les résidus de la fonction $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$.

Réponse. 1 ; -1.

925. Trouver le résidu de la fonction $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ relatif au pôle $z = \pi$.

Réponse. -1.

926. Trouver le résidu de la fonction $f(z) = \frac{z+1}{z^2}$.

Réponse. 1.

927. Trouver l'intégrale $\int_\gamma \frac{z^2}{z-a}\,dz$, où γ est la circonférence $|z| = R > |a|$.

Réponse. $2\pi a^2$.

928. Trouver l'intégrale $\int_\gamma \frac{z}{(z-a)(z-b)}\,dz$, où γ est la circonférence $|z| = R$, $R > |a|$, $R > |b|$, $a \neq b$.

Réponse. $2\pi i$.

929. Trouver l'intégrale $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2-2z+2}$, où γ est une circonférence à l'intérieur de laquelle se situent les pôles du dénominateur.

Réponse. 0.

930. Trouver l'intégrale $\int\limits_{\gamma} \frac{z}{(z-i)(z-3)}\,dz$, où γ est la circonférence $|z|=2$.

Réponse. $\frac{2\pi}{3-i}$.

931. Calculer l'intégrale définie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Réponse. $\frac{3}{8}\pi$.

CHAPITRE VIII

ÉLÉMENTS DE CALCUL OPÉRATIONNEL

Soit $f(t)$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(t) \equiv 0$ pour $t < 0$;

2) $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ pour $t > 0$, où $M > 0$ et s_0 sont des constantes réelles;

3) sur tout segment fini $[a, b]$ du demi-axe positif Ot la fonction $f(t)$ satisfait aux conditions de Dirichlet, c'est-à-dire: a) *elle est bornée*; b) *elle est continue ou bien ne présente qu'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce*; c) *elle présente un nombre fini d'extrémums.*

En calcul opérationnel, de telles fonctions sont appelées *transformables suivant Laplace* ou *originaux.*

Soit $p = \alpha + \beta i$ un paramètre complexe dont $\operatorname{Re} p = \alpha \geqslant s_1 > s_0$.

Si les conditions susmentionnées sont respectées, l'intégrale $\int\limits_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t)\, dt$ converge étant fonction de p:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t)\, dt = \bar{f}(p).$$

C'est l'*intégrale de Laplace* qui définit une fonction de la variable complexe p appelée *transformation* ou *image de Laplace* de la fonction $f(t)$ ou tout court *image de* $f(t)$.

En notation symbolique, le fait que la fonction $\bar{f}(p)$ est l'image de l'original $f(t)$ est représenté comme suit:

$$\bar{f}(p) = L\{f(t)\}, \text{ ou } \bar{f}(p) \div\!\!\rightarrow f(t).$$

On convient que la valeur de l'original $f(t)$ en tout point de discontinuité de première espèce t_0 soit égale à la demi-somme de ses valeurs limites à gauche et à droite de ce point:

$$f(t_0) = \frac{1}{2}\,[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)].$$

Cette condition étant respectée, la correspondance entre les originaux et leurs images jouit des propriétés suivantes:

1) *cette correspondance est biunivoque*, ce qui signifie qu'à un original on ne peut mettre en correspondance qu'une seule image et inversement;

2) *à toute combinaison linéaire d'un ensemble fini d'originaux on peut faire correspondre comme image la combinaison linéaire correspondante des images de ces originaux.*

De cette façon si $\bar{f}_k(p) \xrightarrow{\cdot} f_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, alors

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_k \cdot \bar{f}_k(p) \xrightarrow{\cdot} \sum_{k=1}^{k=n} c_k f_k(t).$$

§ 1. Recherche des images des fonctions

Dans la table qui suit de même que dans les exemples ci-après, la valeur de $f(t)$ n'est donnée que pour $t > 0$, ayant toujours en vue que pour $t < 0$, $f(t) = 0$.

Table des images des principales fonctions élémentaires

n°	$f(t)$ pour $t > 0$	$\bar{f}(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
5	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
6	$e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
7	$e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
8	$\frac{t^n}{n!} \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
9	$t \cdot \cos \beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
10	$t \cdot \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

932. Trouver l'image de la fonction $f(t) = a^t$.

Solution. Etant donné que $a = e^{\ln a}$, alors $f(t) = e^{t \cdot \ln a}$. D'après la formule n° 3, on obtient

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p - \ln a}.$$

933. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \cos^3 t$.

Solution. Utilisons la formule d'Euler

$$\cos t = \frac{e^{ti} + e^{-ti}}{2}.$$

Alors

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ti}+3e^{ti}+3e^{-ti}+e^{-3ti}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3ti}+e^{-3ti}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

En appliquant la formule n°4, on obtient

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}.$$

934. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \operatorname{sh} bt$.

Solution. Pour le sinus hyperbolique, on a par définition

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{bt} - \frac{1}{2}e^{-bt}.$$

Par conséquent,

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)} - \frac{1}{2(p+b)} = \frac{b}{p^2-b^2}.$$

935. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \operatorname{sh} at \cdot \sin bt$.

Solution. Vu que $\operatorname{sh} at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$, on a

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{at}\sin bt - \frac{1}{2}e^{-at}\sin bt.$$

La formule n°7 donne:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2}\frac{b}{(p-a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\frac{b}{(p+a)^2+b^2} = \frac{2pab}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}.$$

936. Trouver l'image de la fonction $f(t) = t\cdot\operatorname{ch} bt$.

Solution. Etant donné que

$$f(t) = t\cdot\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2} = \frac{1}{2}te^{bt} + \frac{1}{2}te^{-bt},$$

la formule n°8, pour $n=1$, $\alpha = \pm b$, donne:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)^2} + \frac{1}{2(p+b)^2} = \frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}.$$

937. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \sin^2 t$.

Réponse. $\bar{f}(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}$.

938. Trouver l'image de la fonction $f(t) = e^t\cdot\cos^2 t$.

Réponse. $\bar{f}(p) = \frac{p\cdot(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+5)}$.

939. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \operatorname{ch} bt$.

Réponse. $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^2-b^2}$.

940. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \operatorname{sh} at\cdot\cos bt$.

Réponse. $\bar{f}(p) = \frac{a(p^2-a^2-b^2)}{p[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$.

941. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \operatorname{ch} at \cdot \sin bt$.

Réponse. $\bar{f}(p) = \dfrac{b(p^2+a^2-b^2)}{[(p-a)^2+b^2]\,[(p+a)^2+b^2]}$.

942. Trouver l'image de la fonction $f(t) = \operatorname{ch} at \cdot \cos bt$.

Réponse. $\bar{f}(p) = \dfrac{p(p^2-a^2+b^2)}{[(p-a)^2+b^2]\,[(p-a)^2+b^2]}$.

943. Trouver l'image de la fonction $f(t) = t \cdot \operatorname{sh} bt$.

Réponse. $\bar{f}(p) = \dfrac{2pb}{(p^2-b^2)^2}$.

§ 2. Recherche de l'original d'après son image

Dans les cas les plus simples, la recherche de l'original d'après son image se fait à l'aide de la table des images des principales fonctions élémentaires avec utilisation du premier et du second théorèmes de développement.

Le second théorème de développement donne la possibilité de trouver l'original d'une image représentée par une fonction rationnelle de p: $\bar{f}(p) = \dfrac{u(p)}{v(p)}$, où $u(p)$ et $v(p)$ sont des polynômes en p respectivement de degré m et n $(m < n)$.

Si la décomposition de $v(p)$ en facteurs simples est de la forme

$$v(p) = (p-p_1)^{k_1} \cdot (p-p_2)^{k_2} \ldots (p-p_r)^{k_r}$$
$$(k_1 + k_2 + \ldots k_r = n),$$

on sait que la fonction $\bar{f}(p)$ peut être développée en une somme d'éléments simples du type

$$\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}},$$

où j et s parcourent respectivement toutes les valeurs de $j = 1$ à $j = r$ et de $s = 1$ à $s = k_j$.

De cette façon,

$$\bar{f}(p) = \sum_{j=1}^{j=r} \sum_{s=1}^{s=k_j} \frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \tag{A}$$

Tous les coefficients $A_{j,s}$ de ce développement peuvent être déterminés à l'aide de la formule

$$A_{j,s} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{p \to p_j} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} [(p-p_j)^{k_j} \cdot \bar{f}(p)] \right\}. \tag{B}$$

La détermination des coefficients $A_{j,s}$ peut aussi se faire à l'aide des techniques élémentaires utilisées par le calcul intégral lors de l'intégration des fractions rationnelles. La mise en œuvre de ces techniques est particulièrement indiquée lorsque toutes les racines complexes du dénominateur $v(p)$ sont simples et deux à deux conjuguées (cf. exercices 944 et 945).

Si toutes les racines de $v(p)$ sont simples, le développement est simplifié:

$$v(p) = (p-p_1)(p-p_2) \ldots (p-p_n),$$
$$(p_j \neq p_k \quad \text{pour} \quad j \neq k),$$
$$\bar{f}(p) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{A_j}{p-p_j}, \quad \text{où} \quad A_j = \frac{u(p_j)}{v'(p_j)}. \tag{C}$$

Après avoir trouvé par tel ou tel procédé le développement de $f(p)$ en éléments simples, l'original $f(t)$ est obtenu à l'aide des formules suivantes:

a) dans le cas où le dénominateur $v(p)$ possède des racines multiples:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{s=1}^{s=k_j} A_{j,s}\frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!}\cdot e^{p_j t}; \qquad \text{(A*)}$$

b) dans le cas où les racines du dénominateur $v(p)$ sont simples:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}\cdot e^{p_j t}. \qquad \text{(C*)}$$

Si l'image de la fonction cherchée peut être développée en série entière suivant les puissances de $\frac{1}{p}$, c'est-à-dire si

$$\bar{f}(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

$\left(\text{cette série doit converger vers } \bar{f}(p) \text{ pour } |p|>R, \text{ où } R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\neq\infty\right)$, alors l'original $f(t)$ est donné par la formule

$$f(t)=a_0+a_1\cdot\frac{t}{1!}+a_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n!\cdot\frac{t^n}{n!}+\ldots,$$

cette série étant convergente pour toutes les valeurs de t (p r e m i è r e t h é o r è m e d e d é v e l o p p e m e n t).

944. Trouver l'original de la fonction $\bar{f}(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}$.

S o l u t i o n. Des techniques élémentaires nous permettent de développer cette fraction en une somme de fractions dont les originaux sont connus:

$$\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}.$$

D'après les formules n°s 6 et 7 de la table des images, on a:

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\div e^t\cdot\cos 2t;$$

$$\frac{1}{(p-1)^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\div\frac{1}{2}e^t\cdot\sin 2t.$$

Donc

$$\frac{p}{(p-1)^2+4}\div e^t\cdot\left\{\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right\}.$$

945. Trouver l'original de la fonction $\bar{f}(p)=\frac{1}{p^3-8}$.

S o l u t i o n. Faisons encore une fois appel à des techniques élémentaires de développement utilisées dans le calcul intégral:

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}.$$

Pour déterminer les coefficients, on a l'identité

$$1 \equiv A\,(p^2+2p+4)+(Bp+C)\,(p-2).$$

En y posant $p=2$, on trouve $1 \equiv 12A$; $A=\frac{1}{12}$. Dans le deuxième membre de cette identité on égale respectivement à zéro et à l'unité le coefficient de p^2 et le terme constant et l'on trouve :

$$A+B=0,\ 4A-2C=1.$$

D'où $B=-A=-\frac{1}{12}$; $C=2A-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$. Donc,

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{(p+1)+3}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

De cette façon,

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Cela nous permet de trouver à l'aide des formules n°s 3, 6 et 7 de la table des images :

$$f(t)=\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}\cdot\{\cos t\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sin t\sqrt{3}\}.$$

946. Trouver l'original de la fonction $\bar{f}(p)=\frac{p}{(p-1)^3\cdot(p+2)^2}$.

S o l u t i o n. Le développement de $\bar{f}(p)$ en éléments simples est de la forme

$$\bar{f}(p)=\frac{A_{1,1}}{(p-1)^3}+\frac{A_{1,2}}{(p-1)^2}+\frac{A_{1,3}}{p-1}+\frac{A_{2,1}}{(p+2)^2}+\frac{A_{2,2}}{p+2}.$$

On trouve les coefficients de ce développement en utilisant la formule (B) :

$$A_{1,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to 1}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{p}{(p+2)^2}=\frac{1}{9};$$

$$A_{1,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left\{\frac{p}{(p+2)^2}\right\}=$$

$$=\lim_{p\to 1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{2p}{(p+2)^3}\right\}=\frac{1}{27};$$

$$A_{1,3}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\{(p-1)^3\cdot f(p)\}=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p}{(p+2)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\left\{-\frac{4}{(p+2)^3}+\frac{6p}{(p+2)^3}\right\}=-\frac{1}{27};$$

$$A_{2,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to-2}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to-2}\frac{p}{(p-1)^3}=\frac{2}{27};$$

$$A_{2,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to-2}\frac{d}{dp}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to-2}\frac{d}{dp}\left[\frac{p}{(p-1)^3}\right]=$$

$$=\lim_{p\to-2}\left[\frac{1}{(p-1)^3}-\frac{3p}{(p-1)^4}\right]=\frac{1}{27}.$$

Ainsi,

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{27}\cdot\left\{\frac{3}{(p-1)^3}+\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p-1}+\frac{2}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}\right\}.$$

D'où, à l'aide des formules n°s 3 et 8 on trouve

$$f(t)=\frac{1}{27}\cdot\left\{\frac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+e^{-2t}\right\}=$$

$$=\frac{3t^2+2t-2}{54}\cdot e^t+\frac{2t+1}{27}\cdot e^{-2t}.$$

947. Trouver l'original de la fonction

$$\bar{f}(p)=\frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

S o l u t i o n. Vu que dans ce cas toutes les racines du dénominateur sont réelles et simples, il vaut mieux utiliser la formule (C*).

On a :

$$u(p)=p+1,\ v(p)=p(p-1)(p-2)(p-3)=$$

$$=p^4-6p^3+11p^2-6p;$$

$$v'(p)=4p^3-18p^2+22p-6.$$

Les racines de $v(p)$: $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=2$, $p_4=3$.

On trouve

$$\frac{u(p_1)}{v'(p_1)}=\frac{1}{-6}=-\frac{1}{6};\quad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)}=\frac{2}{2}=1;$$

$$\frac{u(p_3)}{v'(p_3)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2};\quad \frac{u(p_4)}{v'(p_4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

D'où, d'après la formule (C*), on a immédiatement $f(t)$:

$$f(t)=-\frac{1}{6}+e^t-\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{3t}.$$

948. Trouver l'original de la fonction $\bar{f}(p)=\frac{1}{p(1+p^4)}$, en utilisant le premier théorème de développement.

S o l u t i o n. On a

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{p(1+p^4)}=\frac{1}{p^5}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p^4}}=\frac{1}{p^5}-\frac{1}{p^9}+\frac{1}{p^{13}}-\dots.$$

Cette série converge pour $|p| > 1$. D'où l'on trouve $f(t)$:

$$f(x) = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} - \frac{t^{16}}{16!} + \ldots .$$

949. Trouver $f(t)$ si $\bar{f}(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$.

Indication. Développer $\bar{f}(p)$ en éléments simples à l'aide des techniques élémentaires.

Réponse. $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{12}\cos 2t$.

950. Trouver l'original d'après l'image

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)}.$$

Réponse. $f(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}$.

951. Résoudre le même problème pour $\bar{f}(p) = \frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$.

Réponse. $f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}$.

952. Résoudre le même problème pour $\bar{f}(p) = \frac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$.

Réponse. $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot \operatorname{ch} t + \frac{1}{12}\operatorname{ch} 2t$.

953. En utilisant le premier théorème de développement, trouver l'original de la fonction $\bar{f}(p) = \frac{1}{p^k + a^k}$, où k est un entier positif.

Réponse. $f(t) = \frac{t^k}{k!} - \frac{a^k \cdot t^{2k}}{(2k)!} + \frac{a^{2k} \cdot t^{3k}}{(3k)!} - \ldots .$

§ 3. Convolution des fonctions. Images des dérivées et de l'intégrale de l'original

On appelle *convolution* (ou produit de composition) des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ la fonction

$$F(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\, d\tau.$$

L'interversion des fonctions f_1 et f_2 ne change pas la valeur de l'intégrale qui définit la convolution, donc celle-ci est symétrique par rapport aux fonctions intéressées.

L *image de la convolution de deux originaux est égale au produit de leurs images* (théorème de la convolution des originaux):

$$\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\, d\tau \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}} \bar{f}_1(p)\cdot \bar{f}_2(p),$$

si $\bar{f}_1(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longrightarrow}} f_1(t)$, $\bar{f}_2(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longrightarrow}} f_2(t)$.

Si l'original $f(t)$ est n fois différentiable et que ses dérivées jusqu'à celle d'ordre n sont à leur tour des originaux, le théorème de la différentiation de l'original est valable:

$$f^{(k)}(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^k \cdot \bar{f}(p) - \{p^{k-1} \cdot f(0) + p^{k-2} \cdot f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)\},$$

si $\bar{f}(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

En particulier,

$$f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p \cdot \bar{f}(p) - f(0),$$

$$f''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^2 \cdot \bar{f}(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

et ainsi de suite.

Le théorème de l'intégration est valable pour tous les originaux:

$$\text{si } \bar{f}(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t), \quad \text{alors} \quad \frac{\bar{f}(p)}{p} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

On voit que les images de la dérivée et de l'intégrale sont obtenues en partant de l'image de la fonction $f(t)$ et en effectuant sur $\bar{f}(p)$ des opérations algébriques. Il faut aussi remarquer (voir la table des images) que les images g'un grand nombre de fonctions utilisées dans la pratique ($e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$, etc.) sont des fonctions algébriques de p.

Cela permet d'amener beaucoup d'opérations de l'analyse mathématique (résolution des équations différentielles et intégrales, etc.) à des opérations algébriques effectuées sur les images des fonctions cherchées.

954. En utilisant le théorème de la convolution, trouver l'original de la fonction $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$.

Solution. Ecrivons $\bar{f}(p)$ sous la forme $\frac{p}{p^2-1} \cdot \frac{1}{p^2+1}$.

Vu que

$$\frac{p}{p^2-1} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \operatorname{ch} t, \quad \frac{1}{p^2+1} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \sin t,$$

suivant le théorème de la convolution, on a

$$\frac{p}{p^4-1} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau) \cdot \sin \tau\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} [\operatorname{sh}(t-\tau) \sin \tau + \operatorname{ch}(t-\tau) \cos \tau] \Big|_0^t = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t).$$

955. Trouver l'image de $y''(t) - y'(t) - y(t)$ si $y(0) = y'(0) = 0$ et $\bar{y}(p) \div y(t)$.

Solution. D'après le théorème de la différentiation de l'original, on a:

$$y'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p\bar{y}(p) - y(0) = p \cdot \bar{y}(p),$$

$$y''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^2 \cdot \bar{y}(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot \bar{y}(p).$$

D'où l'on trouve

$$y''(t) - y'(t) - y(t) \leftarrow (p^2 - p - 1)\cdot\bar{y}(p)$$

(à la somme des fonctions en qualité d'image on met en correspondance la somme de leurs images).

956. Trouver l'image de

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$$

si $y(0) = 1$ et $\bar{y}(p) \leftarrow y(t)$.

S o l u t i o n. Suivant les théorèmes de la différentiation et de l'intégration de l'original, on a

$$y'(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} p\cdot\bar{y}(p) - y(0) = p\cdot\bar{y}(p) - 1,$$

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{\bar{y}(p)}{p}.$$

D'où l'on trouve

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} p\bar{y}(p) - 1 + \bar{y}(p) + \frac{\bar{y}(p)}{p} =$$

$$= \frac{p^2+p+1}{p}\cdot\bar{y}(p) - 1.$$

957. Trouver la convolution des fonctions t et $\cos t$ de même que son image.

Réponse. $1 - \cos t \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)}$.

958. En utilisant le théorème de la convolution, trouver l'original de

$$\bar{f}(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Réponse. $f(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\{\sin t + t\cdot\cos t\}$.

959. Trouver l'image de l'expression $F(t) = y(t) - 2y'(t)$, si $y(0) = 0$, $y(t) \leftarrow \bar{y}(p)$.

Réponse. $(1 - 2p)\cdot\bar{y}(p)$.

960. Trouver l'image de l'expression

$$F(t) = y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - 2y(t),$$

si $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y(t) \leftarrow \bar{y}(p)$.

Réponse. $(p^3 - p^2 + 2p - 2)\cdot\bar{y}(p) - p - 1$.

961. Trouver l'image de l'expression

$$F(t) = y'(t) - \int_0^t y(\tau)\, d\tau,$$

si $y(0) = 0$, $y(t) \doteqdot \bar{y}(p)$.

Réponse. $\frac{\bar{y}(p)}{p} \cdot (p^2 - 1)$.

§ 4. Application du calcul opérationnel à la résolution de certaines équations différentielles et intégrales

Si l'on donne une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

dont le deuxième membre $f(t)$ est un original, la solution de cette équation satisfaisant aux conditions initiales arbitraires du type $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$ (c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy arbitraire posé pour cette équation à conditions initiales pour $t = 0$) sera également un original. En désignant l'image de cette solution par $\bar{y}(p)$, on trouve l'image du premier membre de l'équation différentielle initiale et, en égalant cette image à l'image de la fonction $f(t)$, on aboutit à l'ainsi appelée *équation opérationnelle* qui sera toujours une équation algébrique linéaire par rapport à $\bar{y}(p)$.

En partant de cette équation, on trouve d'abord $\bar{y}(p)$ et ensuite $y(t)$ en qualité d'original de $\bar{y}(t)$.

Le même procédé de passage à l'équation opérationnelle permet de trouver sans difficulté la solution des équations intégrales du type

$$\text{a)} \quad \int_0^t K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = f(t),$$

$$\text{b)} \quad y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau,$$

où les fonctions $K(t)$ et $f(t)$ sont des originaux, car l'intégrale qu'y figure est une convolution des fonctions $y(t)$ et $K(t)$.

Ces équations intégrales représentent un cas particulier des *équations intégrales de Volterra de première et de deuxième espèces* dont la forme générale sera obtenue en substituant à la fonction $K(t-\tau)$, que l'on appelle *noyau* de l'équation intégrale, une certaine fonction de deux variables $K(t, \tau)$.

962. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$ si $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solution. On passe aux images:

$$p^2 \bar{y} - p \cdot y(0) - y'(0) - 2(p\bar{y} - y(0)) - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3},$$

ou

$$p^2 \cdot \bar{y} - 2p\bar{y} - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3}, \quad \bar{y} = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Décomposons cette fraction rationnelle en éléments simples:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}=\frac{A}{(p-3)^2}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+1},$$

$$1=A(p+1)+B(p-3)(p+1)+C(p-3)^2.$$

En posant $p=-1$, on obtient $1=16C$, c'est-à-dire $C=\frac{1}{16}$.

En posant $p=3$, on obtient $1=4A$, c'est-à-dire $A=\frac{1}{4}$.

La confrontation des coefficients de p^2 donne:

$$0=B+C, \quad B=-C=-\frac{1}{16}.$$

Par conséquent,

$$\bar{y}=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{1}{16(p+1)}$$

et

$$y=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}.$$

963. Résoudre l'équation $y''+y'-2y=e^{-t}$ si $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

S o l u t i o n. On passe aux images:

$$[p^2\bar{y}-p\cdot y(0)-y'(0)]+[p\cdot\bar{y}-y(0)]-2\bar{y}=\frac{1}{p+1}.$$

A la suite des transformations élémentaires, on obtient

$$\bar{y}=\frac{p+2}{(p+1)(p^2+p-2)}=\frac{1}{p^2-1},$$

d'où $y=\operatorname{sh} t$.

964. Résoudre l'équation intégrale $y=\int_0^t y\,dt+1$.

S o l u t i o n. On établit l'équation opérationnelle:

$$\bar{y}=\frac{\bar{y}}{p}+\frac{1}{p}, \quad \bar{y}(p-1)=1, \quad \bar{y}=\frac{1}{p-1}.$$

Donc, $y=e^t$.

965. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau=1-\cos t.$$

S o l u t i o n. Le premier membre de l'équation donnée représente la convolution des fonctions $y(t)$ et $\sin t$. En passant aux ima-

ges, on obtient

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{(p^2+1)\cdot p}.$$

Par conséquent, $\bar{y}(p)=\frac{1}{p}$ et $y(t)=1$.

966. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^t y(\tau)\cdot e^{t-\tau}\,d\tau=y(t)-e^t.$$

S o l u t i o n. Le premier membre de l'équation donnée est la convolution des fonctions $y(t)$ et e^t. On passe aux images:

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1}=\bar{y}(p)-\frac{1}{p-1},\qquad \bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1}-\bar{y}(p)=-\frac{1}{p-1}.$$

Donc,

$$\bar{y}(p)=\frac{1}{p-2},\qquad y(t)=e^{2t}.$$

967. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1,\end{cases}$$

si $x(0)=0$, $y(0)=5$.

S o l u t i o n. En passant aux images, on obtient

$$\begin{cases}p\cdot\bar{x}(p)=\bar{x}(p)+2\bar{y}(p),\\ p\cdot\bar{y}(p)-5=2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)+\dfrac{1}{p}.\end{cases}$$

En résolvant ce dernier système par rapport à $\bar{x}$ et $\bar{y}$, on a

$$\bar{x}(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)},\qquad \bar{y}(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Pour déterminer x, utilisons le second théorème de développement et la formule (C*):

$$u(p)=10p+2,\ v(p)=p^3-2p^2-3p,\ v'(p)=3p^2-4p-3,$$
$$p_1=0,\ p_2=-1,\ p_3=3;$$
$$\frac{u(p_1)}{v'(p_1)}=\frac{u(0)}{v'(0)}=-\frac{2}{3},\qquad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)}=\frac{u(-1)}{v'(-1)}=-2,$$
$$\frac{u(p_3)}{v'(p_3)}=\frac{u(3)}{v'(3)}=\frac{8}{3}.$$

Ainsi $x = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$. D'une façon analogue, on trouve $y = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$.

Résoudre les équations différentielles suivantes:

968. $y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$.

Réponse. $y = e^{2t}$.

969. $y' + y = e^t$; $y(0) = 0$.

Réponse. $y = \operatorname{sh} t$.

970. $y'' - 9y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$.

Réponse. $y = 0$.

971. $y'' + y' - 2y = e^t$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

Réponse. $y = \frac{1}{3}te^t - \frac{7}{9}e^t - \frac{2}{9}e^{-2t}$.

972. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Réponse. $y = -\frac{5}{2}e^t + 4e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t}$.

Résoudre les systèmes d'équations ci-dessous:

973. $\frac{dx}{dt} = 2y$, $\frac{dy}{dt} = 2x$; $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.

Réponse. $x = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$, $y = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$.

974. $\frac{dx}{dt} = 3x + 4y$, $\frac{dy}{dt} = 4x - 3y$; $x(0) = y(0) = 1$.

Réponse. $x = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t}$, $y = \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5}e^{-5t}$.

Résoudre les équations intégrales ci-après:

975. $\int_0^t y(\tau)\cdot(t-\tau)^2\,d\tau = \frac{1}{3}t^3$.

Réponse. $y(t) = 1$.

976. $\int_0^t y(\tau)\cdot\cos(t-\tau)\,d\tau = 1 - \cos t$.

Réponse. $y(t) = t$.

§ 5. Formule générale d'inversion

Soit $f(t)$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(t) \equiv 0$ pour $t < 0$;

2) $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ pour $t > 0$, où $M > 0$, s_0 étant des constantes réelles;

3) sur tout segment fini $[a, b]$ $(0 < a < b)$ la fonction vérifie les conditions de Dirichlet.

Ces conditions étant respectées, la fonction $\bar{f}(p)$ définie par l'égalité $\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t)\, dt$ sera analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant s_1 > s_0$.

Donnons la formule d'inversion

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{\omega \to \infty} \cdot \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} e^{pt} \cdot \bar{f}(p)\, dp,$$

ou

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \cdot \bar{f}(p)\, dp,$$

qui permet de trouver l'original $f(t)$ en partant de l'image $\bar{f}(p)$, σ étant un nombre arbitraire qui vérifie l'inégalité $\sigma > s_0$.

Si $|\bar{f}(p)| < CR^{-k}$, où $p = Re^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta < \pi$, $R > R_0$, R_0, C et $k > 0$ étant des constantes, l'intégrale

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \cdot \bar{f}(p)\, dp$$

qui figure dans la formule d'inversion peut être remplacée par l'intégrale

$$\int_{\gamma} e^{pt} \cdot \bar{f}(p)\, dp,$$

où γ est une circonférence centrée sur l'origine des coordonnées et contenant à son intérieur tous les pôles de la fonction $F(p) = e^{pt} \cdot \bar{f}(p)$.

Par conséquent,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} \cdot \bar{f}(p)\, dp.$$

En appliquant le théorème fondamental des résidus, on obtient

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i\, (r_1 + r_2 + \cdots + r_m),$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sont les résidus de la fonction $F(p)$ par rapport aux pôles. Ainsi, $f(t) = \sum_{j=1}^{m} r_j$. En particulier, la dernière formule est vraie si $\bar{f}(p)$ est une fonction rationnelle propre.

977. Trouver l'original d'après l'image $\bar{f}(p) = \frac{1}{(p-1)^3}$.

Solution. On trouve le résidu de la fonction $F(p) = \frac{e^{pt}}{(p-1)^3}$:

$$r = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} \frac{d^2}{dp^2} [(p-1)^3 \cdot F(p)] = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} \frac{d^2}{dp^2} (e^{pt}) =$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} t^2 e^{pt} = \frac{t^2}{2!} e^t.$$

Donc $f(t)=\frac{t^2\cdot e^t}{2!}$.

978. Trouver l'original d'après l'image

$$\bar{f}(p)=\frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

Solution. On a

$$F(p)=\frac{pe^{pt}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)},$$

$$r_1=\lim_{p\to-1}(p+1)\cdot F(p)=-\frac{1}{6}e^{-t},$$

$$r_2=\lim_{p\to-2}(p+2)\cdot F(p)=e^{-2t},$$

$$r_3=\lim_{p\to-3}(p+3)\cdot F(p)=-\frac{3}{2}\cdot e^{-3t},$$

$$r_4=\lim_{p\to-4}(p+4)\cdot F(p)=\frac{2}{3}\cdot e^{-4t}.$$

Par conséquent, $f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{2}{3}e^{-4t}$.

979. Trouver l'original d'après l'image

$$\bar{f}(p)=\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}.$$

Réponse. $2e^t-4t-3$.

980. Trouver l'original d'après l'image

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}.$$

Réponse. $-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}$.

981. Trouver l'original d'après l'image

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}.$$

Réponse. $\frac{1}{8}(2t^2-6t+3)e^t-\frac{1}{24}e^{-t}+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

CHAPITRE IX

MÉTHODES DE CALCUL

§ 1. Solution approchée des équations

Pour trouver les valeurs approchées des racines réelles d'une certaine équation $f(x) = 0$, il faut tout d'abord séparer la racine qui nous intéresse, c'est-à-dire déterminer le segment qui ne contient pas d'autres racines de l'équation donnée. On suppose que la fonction $f(x)$ de même que ses dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ sont continues sur le segment $[a, b]$, que les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ prises par la fonction aux extrémités du segment considéré sont de signes opposés, c'est-à-dire $f(a) \cdot f(b) < 0$ et que les deux dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ conservent le signe sur tout le segment $[a, b]$.

Etant donné que les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ sont représentées par les abscisses des points d'intersection de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe Ox, la séparation d'une racine peut se faire en construisant le graphique correspondant. A la place de l'équation $y = f(x)$ on peut prendre l'équation $y = k \cdot f(x)$, où k est une grandeur constante différente de zéro, car les équations $f(x) = 0$ et $kf(x) = 0$ sont équivalentes.

La grandeur constante peut être choisie de façon que les ordonnées des points constituant notre graphique ne soient ni trop grandes ni trop petites. Parfois, il est utile de mettre l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $\varphi(x) = \psi(x)$. Dans ce cas, les racines réelles de l'équation initiale seront données par les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$.

1. Règle des parties proportionnelles (méthode des cordes). On demande de calculer la racine réelle d'une équation $f(x) = 0$ séparée sur le segment $[a, b]$. Examinons la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$. Soient $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Relions par une corde les points $A[a; f(a)]$ et $B[b; f(b)]$ de la courbe. Prenons en tant que valeur approchée de la racine cherchée l'abscisse x_1 du point d'intersection de la corde AB avec l'axe Ox. Cette valeur approchée est trouvée par la formule

$$x_1 = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)},$$

où x_1 appartient à l'intervalle (a, b). Soit, par exemple, $f(x_1) < 0$. Alors on peut prendre comme nouveau segment (plus étroit) de séparation de la racine le segment $[x_1, b]$. En joignant les points $A_1[x_1; f(x_1)]$ et $B[b; f(b)]$, on obtient au point d'intersection de la corde avec l'axe Ox la deuxième approximation x_2 qui est calculée d'après la formule

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) \cdot f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

et ainsi de suite. La suite de nombres $a, x_1, x_2, \ldots$ tend vers la racine cherchée de l'équation $f(x) = 0$. Le calcul des valeurs approchées des racines est continué jusqu'à ce que les décimales que l'on désire conserver dans la réponse cessent de varier (c'est-à-dire jusqu'à l'obtention du degré d précision voulu).

Si $\bar{x}$ est la racine exacte de l'équation $f(x) = 0$ séparée sur le segment $[a, b]$, tandis que ξ est la valeur approchée de cette racine trouvée par la méthode des cordes, alors l'évaluation de l'erreur de cette approximation peut se faire à l'aide de l'inégalité suivante

$$|\bar{x}-\xi| < -\frac{f(a)\cdot f(b)}{2} \max_{a\leqslant x\leqslant b} \left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right|.$$

2. Méthodes des tangentes (méthode de Newton). Admettons que la racine réelle d'une équation $f(x) = 0$ soit séparée sur le segment $[a, b]$. Supposons que toutes les restrictions formulées ci-avant et concernant la fonction $f(x)$ restent en vigueur. Prenons sur le segment $[a, b]$ un nombre x_0 tel que $f(x_0)$ soit de même signe que $f''(x_0)$, c'est-à-dire $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ (en particulier, on peut situer x_0 à l'extrémité du segment $[a, b]$ où cette condition est respectée). Menons au point $M_0\,[x_0; f(x_0)]$ la tangente à la courbe $y = f(x)$. Prenons comme valeur approchée de la racine l'abscisse du point d intersection de cette tangente avec l'axe Ox. Cette valeur approchée de la racine sera trouvée par la formule

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

En appliquant ce procédé encore une fois au point $M_1\,[x_1; f(x_1)]$, on trouvera

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

et ainsi de suite. La limite de la suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ obtenue de cette façon donne la racine cherchée.

L'inégalité ci-dessous permet d'évaluer l'erreur de la valeur approchée de la racine trouvée par la méthode de Newton

$$|\bar{x}-\xi| < \frac{[f(\xi)]^2}{2} \max_{a\leqslant x\leqslant b} \left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right|.$$

3. Application combinée de la méthode des cordes et de celle des tangentes. On demande de trouver la racine réelle d'une équation $f(x) = 0$ séparée sur le segment $[a, b]$. On suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés et chacune des dérivées conserve son signe sur le segment de séparation. Prenons sur le segment $[a, b]$ un point x_0 tel que $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ (x appartenant au segment de séparation) soient de même signe.

Utilisons les formules des méthodes des cordes et des tangentes:

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Les grandeurs x_{11} et x_{12} appartiennent au segment de séparation, $f(x_{11})$ et $f(x_{12})$ étant de signes opposés.

Construisons un nouveau couple d'approximations de la racine:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})},$$

$$x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12}-x_{11})\,f(x_{11})}{f(x_{12})-f(x_{11})}.$$

Sur l'axe numérique, les points x_{21} et x_{22} se trouvent entre les points x_{11} et x_{12}, $f(x_{21})$ et $f(x_{22})$ étant de signes opposés.

Calculons maintenant les valeurs

$$x_{31} = x_{21} - \frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})},$$

$$x_{32} = x_{21} - \frac{(x_{22} - x_{21}) f(x_{21})}{f(x_{22}) - f(x_{21})},$$

et ainsi de suite.

Chacune des suites

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n1}, \ldots$$

et

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{n2}, \ldots$$

tend vers la racine cherchée, l'une d'elles étant monotonement croissante, l'autre monotonement décroissante. Supposons que $x_{n1} < \bar{x} < x_{n2}$, alors $0 < \bar{x} - x_{n-1} < x_{n2} - x_{n1}$. En donnant à l'avance une grandeur suffisamment petite ε, on peut, en augmentant n, obtenir la vérification de l'inégalité $x_{n2} - x_{n1} < \varepsilon$, ce qui signifie que pour la même valeur de n, l'inégalité

$$\bar{x} - x_{n1} < \varepsilon$$

sera satisfaite. Ainsi, x_{n1} est la valeur approchée de la racine $\bar{x}$ calculée de façon que l'erreur ne dépasse pas ε.

Ainsi, par exemple, pour trouver la valeur approchée de $\bar{x}$ à 0,001 près, il faut déterminer n de façon que les valeurs de x_{n1} et de x_{n2} calculées à 0,001 près coïncident.

4. Méthode d'itération. Si l'équation donnée est mise sous la forme $x = \varphi(x)$, où $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ partout sur le segment $[a, b]$, sur lequel l'équation initiale n'a qu'une seule racine, alors, en partant d'une valeur initiale x_0 appartenant au segment $[a, b]$, on peut construire la suite ci-dessous :

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

La limite de la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représente la racine unique de l'équation $f(x) = 0$ sur le segment $[a, b]$. L'erreur de la valeur approchée x_n de la racine $\bar{x}$ trouvée par la méthode d'itération est évaluée à l'aide de l'inégalité

$$|\bar{x} - x_n| < \frac{r}{1-r} |x_n - x_{n-1}|.$$

Pour trouver la valeur approchée de la racine de façon que l'erreur commise ne dépasse pas ε, il suffit de déterminer n de manière que l'inégalité

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{r-1}{r} \varepsilon$$

soit vérifiée.

5. Méthode des essais. Le segment de séparation de la racine réelle peut toujours être diminué en le divisant, par exemple, en deux parties égales et en déterminant la partie du segment initial aux extrémités de laquelle la fonction $f(x)$ change de signe. Le nouveau segment ainsi obtenu et à nouveau divisé en deux parties et ce processus est continué jusqu'à ce que les décimales que l'on désire conserver dans la réponse cessent de varier.

982. A l'aide de la méthode des cordes, trouver la racine positive de l'équation $x^4 - 2x - 4 = 0$ à 0,01 près.

S o l u t i o n. La racine positive va se trouver dans l'intervalle (1 ; 1,7), car $f(1) = -5 < 0$, alors que $f(1,7) = 0,952 > 0$.

Trouvons la première valeur approchée de la racine d'après la formule

$$x_1 = 1 - \frac{(1{,}7-1)\cdot f(1)}{f(1{,}7)-f(1)} = 1{,}588\,;$$

étant donné que $f(1{,}588) = -0{,}817 < 0$, on applique encore une fois la méthode des cordes sur l'intervalle (1,588 ; 1,7) :

$$x_2 = 1{,}588 - \frac{(1{,}7-1{,}588)\cdot f(1{,}588)}{f(1{,}7)-f(1{,}588)} = 1{,}639\,;$$

$$f(1{,}639) = -0{,}051 < 0.$$

On trouve la troisième approximation :

$$x_3 = 1{,}639 - \frac{(1{,}7-1{,}639)\cdot f(1{,}639)}{f(1{,}7)-f(1{,}639)} = 1{,}642\,;$$

$$f(1{,}642) = -0{,}016 < 0.$$

On trouve la quatrième approximation :

$$x_4 = 1{,}642 - \frac{(1{,}7-1{,}642)\cdot f(1{,}642)}{f(1{,}7)-f(1{,}642)} = 1{,}643\,;$$

$$f(1{,}643) = 0{,}004 > 0.$$

Par conséquent, la racine cherchée calculée à 0,01 près est égale à 1,64.

983. Résoudre l'exemple précédent en appliquant la méthode des tangentes.

Solution. Ici, $f(x) = x^4 - 2x - 4$, $f'(x) = 4x^3 - 2$, $f''(x) = 12x^2$. Vu que $f(x)$ et $f''(x)$, pour $x_0 = 1{,}7$, ont le même signe, à savoir $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$ et $f''(1{,}7) > 0$, on utilisera la formule

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

où $f'(1{,}7) = 4\cdot 1{,}7^3 - 2 = 17{,}652$. Alors

$$x_1 = 1{,}7 - \frac{0{,}952}{17{,}652} = 1{,}646.$$

Appliquons encore une fois la méthode des tangentes :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

où $f(x_1) = f(1{,}646) = 0{,}048$, $f'(1{,}646) = 15{,}838$;

$$x_2 = 1{,}646 - \frac{0{,}048}{15{,}838} = 1{,}643\,;$$

$$f(1{,}643) = 0{,}004,\ f'(1{,}643) = 15{,}740\,;$$

$$x_3 = 1{,}643 - \frac{0{,}004}{15{,}740} = 1{,}6427.$$

Par conséquent, la racine cherchée calculée à 0,01 près est égale à 1,64.

984. En combinant la méthode des cordes et celle des tangentes, trouver à 0,001 près la valeur approchée de la racine de l'équation $x^3 + x^2 - 11 = 0$ séparée sur l'intervalle (1, 2).

Solution. On a $f(x) = x^3 + x^2 - 11$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f''(x) = 6x + 2$. Dans l'intervalle donné, $f''(x) > 0$. C'est pourquoi, en appliquant la méthode des tangentes, on prend comme première approximation $x_0 = 2$, car $f(2) = 1 > 0$;

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} = 1{,}9375 \approx 1{,}94;$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} = 1 - \frac{(2-1)(-9)}{1-(-9)} = 1 + \frac{9}{10} = 1{,}9.$$

La racine cherchée se situe dans l'intervalle (1,9 ; 1,94) :

$$f(1{,}9) = -0{,}531;\quad f(1{,}94) = 0{,}065;\quad f'(1{,}94) = 15{,}172;$$

$$x_{21} = 1{,}94 - \frac{0{,}065}{15{,}172} = 1{,}936;$$

$$x_{22} = 1{,}9 - \frac{0{,}04\cdot(-0{,}531)}{0{,}065+0{,}531} = 1{,}936.$$

Etant donné que les valeurs de x_{21} et de x_{22} calculées à 0,001 près coïncident, la valeur approchée de la racine $\bar{x}$ calculée à 0,001 près est égale à 1,936.

985. En utilisant la méthode d'itération, trouver à 0,001 près la valeur approchée de la racine de l'équation $2 - \lg x - x = 0$.

Solution. Trouvons le segment de séparation de la racine réelle de notre équation. Mettons celle-ci sous la forme $\lg x = -x + 2$ et construisons les courbes représentatives des fonctions

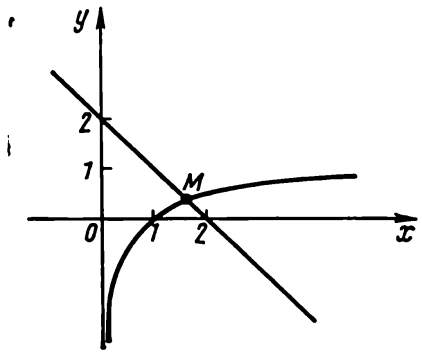

Fig. 60

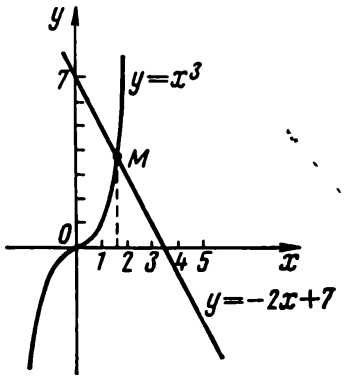

Fig. 61

$y = \lg x$ et $y = -x + 2$. L'abscisse du point M d'intersection de ces courbes se situe sur le segment compris entre 1 et 2. Pour cette raison, en tant que valeur de départ de $\bar{x}$ on peut prendre $x_0 = 1$ (fig. 60).

Ecrivons l'équation donnée comme suit: $x = 2 - \lg x$. Ici,

$$\varphi(x) = 2 - \lg x, \quad \varphi'(x) = -\frac{\lg e}{x},$$

$|\varphi'(x)| < 1$ sur le segment $1 \leqslant x \leqslant 2$, ce qui nous permet d'utiliser la méthode d'itération. Trouvons maintenant la première valeur approchée:

$$x_1 = 2 - \lg x_0 = 2 - \lg 1 = 2.$$

Trouvons la deuxième valeur approchée et les approximations successives:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 2 - \lg x_1 = 2 - \lg 2 = 2 - 0{,}3010 = 1{,}6990;\\
x_3 &= 2 - \lg 1{,}6990 = 2 - 0{,}2302 = 1{,}7698;\\
x_4 &= 2 - \lg 1{,}7698 = 2 - 0{,}2480 = 1{,}7520;\\
x_5 &= 2 - \lg 1{,}7520 = 2 - 0{,}2435 = 1{,}7565;\\
x_6 &= 2 - \lg 1{,}7565 = 2 - 0{,}2445 = 1{,}7555;\\
x_7 &= 2 - \lg 1{,}7555 = 2 - 0{,}2444 = 1{,}7556.
\end{aligned}$$

Ainsi, la racine cherchée est $x \cong 1{,}755$.

986. A l'aide de la méthode des essais, résoudre l'équation $x^3 + 2x - 7 = 0$ à 0,01 près.

S o l u t i o n. L'intervalle de séparation des racines exactes peut être trouvé en construisant les courbes représentatives des fonctions $y = x^3$ et $y = -2x + 7$ (fig. 61). Le seul point d'intersection de ces courbes se trouve dans l'intervalle $1 < x < 2$. Par conséquent, la racine cherchée se situe dans l'intervalle (1, 2), ce qui signifie que l'on peut prendre $a = 1$, $b = 2$. La valeur de la fonction $f(x)$ pour $x = 1$: $f(1) = -4 < 0$; pour $x = 2$: $f(2) = 5 > 0$. Décomposons l'intervalle (1, 2) en deux parties égales:

$$c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

et calculons $f(c_1) = f(1{,}5) = -0{,}625 < 0$. Donc, la racine cherchée se trouve dans l'intervalle (1,5; 2).

On prend

$$c_2 = 1{,}7;\ f(c_2) = f(1{,}7) = 1{,}313 > 0.$$

On voit que la racine cherchée se trouve dans l'intervalle (1,5; 1,7). On prend

$$c_3 = 1{,}6;\ f(c_3) = f(1{,}6) = 0{,}296 > 0.$$

De cette façon, on est parvenu à rendre l'intervalle de séparation plus étroit en le ramenant à (1,5; 1,6). En continuant ce processus, on pose $c_4 = 1{,}55$; $f(c_4) = f(1{,}55) = -0{,}176 < 0$. L'intervalle de séparation de la racine cherchée devient (1,55; 1,6).

Soit

$$c_5 = 1{,}57;\quad f(c_5) = f(1{,}57) = 0{,}010 > 0$$

et la racine cherchée doit se trouver dans l'intervalle (1,55; 1,57);

$$c_6 = 1{,}56; \quad f(c_6) = f(1{,}56) = -0{,}084 < 0,$$

l'intervalle de séparation de la racine est (1,56; 1,57);

$$c_7 = 1{,}565; \quad f(c_7) = f(1{,}565) = -0{,}037 < 0,$$

l'intervalle de séparation est (1,565; 1,57);

$$c_8 = 1{,}568; \quad f(c_8) = f(1{,}568) = -0{,}009 < 0.$$

On arrive ainsi à l'intervalle (1,568; 1,57). On voit que la racine cherchée calculée à 0,01 près est $x = 1{,}57$.

987. A l'aide des constructions graphiques, déterminer les intervalles de séparation des racines réelles de l'équation $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$.

Réponse. (0, 1), (2, 3), (6, 7).

988. A l'aide des constructions graphiques, déterminer les intervalles de séparation des racines réelles de l'équation $x^3 - 12x + 1 = 0$.

Réponse. (—4, —3), (0, 1), (3, 4).

Résoudre à 0,01 près à l'aide de la méthode des cordes et des tangentes les équations suivantes:

989. $x^4 + 3x - 20 = 0$.

Réponse. 1,94.

990. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Réponse. 2,09.

991. $x^4 - 3x + 1 = 0$.

Réponse. 0,33; 1,30.

992. $x^3 + 3x + 5 = 0$.

Réponse. —1,15.

993. $x^4 + 5x - 7 = 0$ (utiliser la méthode combinée des cordes et des tangentes).

Réponse. 1,11.

Résoudre à 0,01 près à l'aide de la méthode d'itération les équations suivantes:

994. $x^3 - 12x - 5 = 0$.

Réponse. 0,42.

995. $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$.

Réponse. 3,62.

En appliquant la méthode des essais, par décomposition de l'intervalle de séparation de la racine, résoudre à 0,01 près les équations suivantes:

996. $x + e^x = 0$.

Réponse. —0,56.

997. $x^5 - x - 2 = 0$.

Réponse. 1,27.

998. En appliquant deux fois de suite la méthode des cordes,

trouver la valeur approchée de la racine réelle de l'équation $x^3 - 10x + 5 = 0$ séparée sur le segment [0; 0,6]. Calculer les valeurs approchées x_1 et x_2 à deux décimales près. Evaluer l'erreur de la valeur approchée x_2.

Solution. On trouve

$$f(x) = x^3 - 10x + 5, \quad f'(x) = 3x^2 - 10, \quad f''(x) = 6x;$$

$$f(0) = 5; \; f(0{,}6) = 0{,}216 - 6 + 5 = -0{,}784;$$

$$x_1 = 0 - \frac{0{,}6 \cdot 5}{-0{,}784 - 5} = \frac{3}{5{,}784} = 0{,}52;$$

$$f(0{,}52) = 0{,}141 - 5{,}2 + 5 = -0{,}059 < 0.$$

Le nouvel intervalle de séparation est (0; 0,52). On trouve la deuxième approximation:

$$x_2 = 0 - \frac{0{,}52 \cdot 5}{-0{,}059 - 5} = \frac{2{,}6}{5{,}059} = 0{,}51.$$

Evaluons l'erreur de cette approximation d'après la formule

$$|\bar{x} - x_2| < -\frac{1}{2} f(a) f(b) \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right|,$$

en posant $a = 0$, $b = 0{,}52$. On a

$$|\bar{x} - x_2| < \frac{5 \cdot 0{,}059}{2} \max_{0 \leqslant x \leqslant 0{,}52} \left| \frac{6x}{(3x^2 - 10)^3} \right|.$$

Dans l'intervalle indiqué,

$$\left| \frac{6x}{(3x^2 - 10)^3} \right| = \frac{6x}{(10 - 3x^2)^3}.$$

La valeur maximum de cette fonction est atteinte pour $x = 0{,}52$. De cette façon,

$$|\bar{x} - x_2| < 0{,}1475 \cdot \frac{3{,}12}{(10 - 0{,}8112)^3}.$$

Ainsi, l'on obtient l'évaluation de l'erreur commise lors du calcul de la valeur approchée de la racine: $|\bar{x} - 0{,}51| < 0{,}0006$. Il s'ensuit que la valeur approchée de la racine $x_2 = 0{,}51$ contient deux décimales exactes.

999. En appliquant deux fois de suite la méthode des tangentes, trouver la valeur approchée de la racine réelle de l'équation $x^4 - 8x + 1 = 0$ séparée sur le segment [1,6; 2]. Calculer les valeurs approchées x_1 et x_2 à deux décimales près. Evaluer l'erreur de l'approximation x_2.

Solution. On trouve

$$f(x) = x^4 - 8x + 1,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 8,$$
$$f''(x) = 12x^2;$$
$$f(1{,}6) = -5{,}246,\ f(2) = 1;$$

$f''(x) > 0$, $f(2) = 1 > 0$ et pour cette raison, on prend $x_0 = 2$. On utilise la formule

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

c'est-à-dire

$$x_1 = 2 - \frac{1}{24} = 1{,}96.$$

Déterminons la deuxième approximation :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\quad f(x_1) = 1{,}96^4 - 8\cdot 1{,}96 + 1 = 0{,}09,$$
$$f'(x_1) = 4\cdot 1{,}96^3 - 8 = 22{,}12;$$
$$x_2 = 1{,}96 - \frac{0{,}09}{22{,}12} = 1{,}956 \approx 1{,}96.$$

Evaluons l'erreur de l'approximation trouvée de la racine :

$$|\bar{x} - x_2| < \frac{[f(x_2)]^2}{2} \max_{1{,}6 \leqslant x \leqslant 2} \left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right|.$$

Dans l'intervalle (1,6; 2)

$$\left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right| = \left| \frac{12x^2}{(4x^3-8)^3} \right| = \frac{3x^2}{16(x^3-2)^3}.$$

A l'intérieur du segment [1,6; 2] la fonction $\frac{x^2}{(x^3-2)^3}$ n'a pas d'extrémums. La valeur maximale de la fonction est atteinte pour $x = 1{,}6$:

$$|\bar{x} - 1{,}96| < \frac{0{,}09^2}{2} \cdot \frac{3{,}16^2}{16(1{,}6^3-2)^3},$$

c'est-à-dire $|\bar{x} - 1{,}96| < 0{,}0002$, ce qui signifie que l'approximation de la racine 1,96 a tous ses chiffres exacts.

1000. En appliquant cinq fois de suite la méthode d'itération, trouver à trois décimales près la valeur approchée de la racine de l'équation $2x - \cos x = 0$ séparée sur le segment [0; 0,5].

Solution. De l'équation donnée on tire $x = \frac{\cos x}{2}$, donc $\varphi(x) = \frac{\cos x}{2}$, $\varphi'(x) = -\frac{\sin x}{2}$. Sur le segment [0; 0,5] $|\varphi'(x)| < 0{,}5 = r < 1$. Posons $x_0 = 0{,}5$; $x_1 = \frac{\cos x_0}{2}$, $x_2 = \frac{\cos x_1}{2}$ et ainsi de

suite. Effectuons les calculs :

$$x_1 = \frac{\cos 0{,}5}{2} = \frac{\cos 28°41'}{2} = 0{,}4386,$$

$$x_2 = \frac{\cos 0{,}4386}{2} = \frac{\cos 25°08'}{2} = 0{,}4527,$$

$$x_3 = \frac{\cos 0{,}4527}{2} = \frac{\cos 25°56'}{2} = 0{,}4496,$$

$$x_4 = \frac{\cos 25°46'}{2} = 0{,}4503,$$

$$x_5 = \frac{\cos 25°48'}{2} = 0{,}4502.$$

Evaluons l'erreur d'après la formule

$$|\bar{x} - x_5| < \frac{r}{1-r}|x_5 - x_4|.$$

On obtient

$$|\bar{x} - 0{,}4502| < |0{,}4502 - 0{,}4503|,$$

c'est-à-dire

$$|\bar{x} - 0{,}4502| < 0{,}0001,$$

ou $0{,}4501 < \bar{x} < 0{,}4503$. Il s'ensuit que la valeur approchée de la racine calculée à trois décimales près est égale à 0,450.

6. Généralisation de la méthode de Newton pour la solution approchée des équations.

a) Méthode de Tchébychef. On demande de trouver la racine réelle d'une équation $f(x) = 0$ séparée dans l'intervalle (a, b). On suppose que la fonction $f(x)$ avec ses dérivées jusqu'à celle d'ordre n inclusivement soient continues et que $f'(x) \neq 0$ dans l'intervalle (a, b). Considérons la courbe $x = \xi + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_n y^n$. Donnons aux paramètres $\xi, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des valeurs telles que les courbes $y = f(x)$ et $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$ aient un point de tangence d'ordre n au point d'abscisse x_0 se trouvant dans l'intervalle (a, b). On se rappellera (cf. volume I, chapitre VI, § 4) que deux courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ ont un point de *tangence d'ordre n* en un point d'abscisse x_0 si

$$f(x_0) = \varphi(x_0),\ f'(x_0) = \varphi'(x_0),$$
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0).$$

Au point de vue géométrique, un point de tangence d'ordre n représente la position limite de $n + 1$ points d'intersection des courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ lorsque ces points d'intersection tendent vers le point d'abscisse x_0. Dans le cas examiné, la courbe $y = \varphi(x)$ est définie d'une façon implicite par l'équation $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$.

Lorsqu'on choisit de telle façon les paramètres $\xi, A_1, A_2, \ldots, A_n$, on peut prendre en tant que valeur approchée de la racine cherchée l'abscisse du point d'intersection de la courbe $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$ avec l'axe Ox, c'est-à-dire le nombre ξ.

Si $n = 1$, alors $\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (méthode de Newton).

Si $n = 2$, alors $\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 \cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3}$. (1)

Si $n = 3$, alors

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 \cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3} - \frac{[f(x_0)]^3}{3!} \cdot \frac{3\,[f''(x_0)]^2 - f'(x_0) \cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5}. \quad (2)$$

Si $n = 4$, alors

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 \cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3} - \frac{[f(x_0)]^3}{3!} \cdot \frac{3\,[f''(x_0)]^2 - f'(x_0) \cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5} -$$

$$- \frac{[f(x_0)]^4}{4!} \cdot \frac{[f'(x_0)]^2 \cdot f^{\mathrm{IV}}(x_0) - 10 f'(x_0)\, f''(x_0)\, f'''(x_0) + 15\,[f''(x_0)]^3}{[f'(x_0)]^7}. \quad (3)$$

Ci-dessous on évalue l'erreur des valeurs des racines trouvées par les formules (1) et (2).

Pour la formule (1), lorsque $n = 2$:

$$|\bar{x} - \xi| < \frac{[f(x_0)]^3}{3!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \frac{3\,[f''(x)]^2 - f'(x)\, f'''(x)}{[f'(x)]^5} \right|.$$

Pour la formule (2), lorsque $n = 3$:

$$|\bar{x} - \xi| < \frac{[f(x_0)]^4}{4!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \frac{[f'(x)]^2\, f^{\mathrm{IV}}(x) - 10 f'(x)\, f''(x)\, f'''(x) + 15\,[f''(x)]^3}{[f'(x)]^7} \right|.$$

1001. Trouver la valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 0,0000001 près.

Solution. En appliquant à l'équation $x^2 - 3 = 0$ la formule de Tchébychef pour $n = 4$ et en posant $x_0 = 1{,}7$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3, & f(1{,}7) &= -0{,}11, \\ f'(x) &= 2x, & f'(1{,}7) &= 3{,}4, \\ f''(x) &= 2, & f''(1{,}7) &= 2, \\ f'''(x) &= 0, & f'''(1{,}7) &= 0, \\ f^{\mathrm{IV}}(x) &= 0, & f^{\mathrm{IV}}(1{,}7) &= 0, \end{aligned}$$

$$\xi = 1{,}7 + \frac{0{,}11}{3{,}4} - \frac{0{,}11^2 \cdot 2}{2!\,3{,}4^3} + \frac{0{,}11^3}{3!} \cdot \frac{12}{3{,}4^5} - \frac{0{,}11^4}{4!} \cdot \frac{120}{3{,}4^7} =$$

$$= 1{,}7 + \frac{0{,}11}{3{,}4} - \frac{0{,}11^2}{3{,}4^3} + \frac{2 \cdot 0{,}11^4}{3{,}4^5} - \frac{5 \cdot 0{,}11^4}{3{,}4^7} =$$

$$= 1{,}7 + 0{,}0323529 - 0{,}0003078 + 0{,}0000058 - 0{,}0000001 =$$

$$= 1{,}7320508.$$

Etant donné que $f(1{,}7320508) < 0$, alors que $f(1{,}7320509) > 0$, tous les chiffres de la valeur approchée $\xi = 1{,}7320508$ sont exacts.

1002. Trouver la valeur approchée de la racine réelle de l'équation $2x^3 + 2x - 7 = 0$ à 0,000001 près.

Solution. On a $f(x) = 2x^3 + 2x - 7$, $f'(x) = 6x^2 + 2 > 0$; $f(x)$ est une fonction croissante;

$$f(1{,}3) = 4{,}394 + 2{,}6 - 7 = -0{,}006 < 0,$$
$$f(1{,}4) = 5{,}488 + 2{,}8 - 7 = 1{,}288 > 0.$$

Par conséquent, l'intervalle (1,3; 1,4) contient la seule racine réelle de l'équation $2x^3 + 2x - 7 = 0$.

On pose $x_0 = 1{,}3$. A l'aide de la formule de Tchébychef, pour $n = 2$, on trouve:

$$f(x) = 2x^3 + 2x - 7, \qquad f(1{,}3) = -0{,}006,$$
$$f'(x) = 6x^2 + 2, \qquad f'(1{,}3) = 12{,}14,$$
$$f''(x) = 12x, \qquad f''(1{,}3) = 15{,}6;$$

$$\xi = 1{,}3 + \frac{0{,}006}{12{,}14} - \frac{0{,}000036}{2} \cdot \frac{15{,}6}{1789{,}1883} =$$

$$= 1{,}3 + 0{,}0004942 - 0{,}0000002; \quad \xi = 1{,}300494;$$

$$f(1{,}300494) = 4{,}399009 + 2{,}600988 - 7 = -0{,}000003 < 0,$$
$$f(1{,}300495) = 4{,}399021 + 2{,}600990 - 7 = +0{,}000011 > 0.$$

Il s'ensuit que tous les chiffres de la valeur approchée de la racine $\xi = 1{,}300494$ sont exacts.

1003. En utilisant la formule de Tchébychef, trouver la valeur approchée de $\sqrt[3]{5}$ à 0,00001 près. On pose $n = 3$.

Réponse. $\xi = 1{,}70997$.

1004. En posant dans la formule de Tchébychef $n = 2$, calculer la valeur de la racine réelle de l'équation $3x^5 + 6x - 16 = 0$ à 0,00001 près.

Réponse. $\xi = 1{,}23429$.

b) Pour trouver la valeur de la racine réelle de l'équation $f(x) = 0$ séparée dans l'intervalle (a, b), on considère la courbe

$$y = \frac{x - \xi_n}{A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_{n-1}(x - x_0)^{n-1}}, \tag{1b}$$

qui possède au point d'abscisse x_0 un point de tangence d'ordre n avec la courbe $y = f(x)$. Prenons en tant que valeur approchée de la racine l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec l'axe Ox, c'est-à-dire ξ_n.

La condition de tangence nous permet de trouver cette valeur approchée:

$$\xi_n = x_0 - b_0 \cdot \frac{D_{n-1}}{D_n}, \tag{2b}$$

où

$$D_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & b_1 & b_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_2 & b_1 \end{vmatrix},$$

$$b_k = \frac{f^k(x_0)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \qquad b_0 = f(x_0).$$

Si $n = 1$, alors l'équation (1b) définit la ligne droite $y = \frac{1}{A_0}(x - \xi)$ et la valeur approchée de la racine est trouvée par la formule de la méthode de Newton.

De cette façon, la formule (2b) généralise la méthode de Newton, donnant la solution approchée des équations.

Si $n = 2$, alors

$$\xi_2 = x_0 - \frac{b_0 b_1}{b_1^2 - b_0 b_2}. \tag{3b}$$

Si $n = 3$, alors

$$\xi_3 = x_0 - \frac{(b_1^2 - b_0 b_2)\, b_0}{\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}} \tag{4b}$$

1005. Trouver la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,00001 près.

Solution. Posons $f(x) = x^2 - 2$. Appliquons la formule (4b), en prenant $x_0 = 1{,}4$. Alors

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 - 2, & f(1{,}4) = -0{,}04, & b_0 = -0{,}04, \\ f'(x) = 2x, & f'(1{,}4) = 2{,}8, & b_1 = 2{,}8, \\ f''(x) = 2, & f''(1{,}4) = 2, & b_2 = 1, \\ f'''(x) = 0, & f'''(1{,}4) = 0, & b_3 = 0; \end{array}$$

$$\xi_3 = 1{,}4 + \frac{(7{,}84 + 0{,}04)\cdot 0{,}04}{\begin{vmatrix} 2{,}8 & -0{,}04 & 0 \\ 1 & 2{,}8 & -0{,}04 \\ 0 & 1 & 2{,}8 \end{vmatrix}} = 1{,}4 + \frac{7{,}88\cdot 0{,}04}{21{,}952 + 0{,}224} =$$

$$= 1{,}4 + \frac{0{,}31521}{22{,}176} = 1{,}4 + 0{,}01421 = 1{,}41421,$$

c'est-à-dire

$$\xi = 1{,}41421.$$

Toutes les décimales de la valeur approchée de la racine sont exactes.

1006. En posant $n = 2$, trouver la valeur approchée de la racine positive de l'équation $x^3 + x^2 - 4 = 0$ à 0,0001 près.

Solution. Prenons $x_0 = 1{,}3$. On a:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4, \quad f(1{,}3) = -0{,}113, \quad b_0 = -0{,}113,$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x, \quad f'(1{,}3) = 7{,}67, \quad b_1 = 7{,}67,$$
$$f''(x) = 6x + 2, \quad f''(1{,}3) = 9{,}8, \quad b_2 = 4{,}9;$$

$$\xi_2 = 1{,}3 + \frac{7{,}67 \cdot 0{,}113}{7{,}67^2 + 0{,}113 \cdot 4{,}9} = 1{,}3 + \frac{0{,}86671}{58{,}8289 + 0{,}5537} =$$
$$= 1{,}3 + \frac{0{,}86671}{59{,}3826} = 1{,}3 + 0{,}0146 = 1{,}3146.$$

Toutes les décimales sont exactes.

1007. En posant $n = 2$, trouver la valeur approchée de la racine de l'équation $x + \ln x = 3$ à 0,001 près.

Réponse. 2,214.

1008. Trouver la valeur approchée de $\sqrt[5]{5}$ à 0,00001 près à l'aide de la formule (4b).

Réponse. 1,37973.

1009. En utilisant la formule (3b), calculer à 0,0001 près la racine négative de l'équation $5x^6 - 5x - 47{,}071 = 0$.

Réponse. —1,4142.

§ 2. Interpolation

1. Polynôme d'interpolation de Lagrange. On donne le tableau de valeurs ci-dessous

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

On demande de former un polynôme $y = f(x)$ de degré $m \leqslant n - 1$ de façon qu'il prenne les valeurs y_i pour les valeurs correspondantes x_i, c'est-à-dire $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Autrement dit, la courbe représentative de ce polynôme doit passer par n points donnés $M_i(x_i; y_i)$.

Désignons par $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$ un polynôme auxiliaire de degré n contenant les valeurs tabulaires données x_i de la variable indépendante. On obtient ainsi l'égalité

$$f(x) = \frac{y_1 \cdot \varphi(x)}{(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)} +$$
$$+ \frac{y_2 \cdot \varphi(x)}{(x - x_2)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} + \ldots +$$
$$+ \frac{y_n \cdot \varphi(x)}{(x - x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}$$

ou
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\cdot\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)}.$$

C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange.

1010. Former le polynôme de Lagrange vérifiant le tableau de valeurs ci-dessous

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Solution. Le polynôme auxiliaire est de la forme $\varphi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Calculons successivement les valeurs que prend $\varphi'(x)$ pour les valeurs données de x:

$$\varphi'(x) = (x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)(x-2)(x-3);$$

$$\varphi'(1) = -6, \quad \varphi'(2) = 2, \quad \varphi'(3) = -2, \quad \varphi'(4) = 6.$$

Alors

$$f(x) = \frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = x+1.$$

On voit que, dans ce cas, le polynôme d'interpolation est représenté par la fonction linéaire $f(x) = x + 1$.

1011. Trouver l'équation de la parabole qui passe par les points (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1).

Solution. Le polynôme auxiliaire sera $\varphi(x) = (x-2) \times (x-4)(x-6)(x-8)(x-10)$. Calculons:

$$\varphi'(x) = (x-4)(x-6)(x-8)(x-10) + (x-2)(x-6) \times (x-8)(x-10) + (x-2)(x-4)(x-8)(x-10) + (x-2)(x-4)(x-6)(x-10) + (x-2)(x-4)(x-6)(x-8);$$

$$\varphi'(2) = 384, \ \varphi'(4) = -96, \ \varphi'(6) = 64, \ \varphi'(8) = -96, \ \varphi'(10) = 384.$$

Alors

$$f(x) = \frac{0}{384}(x-4)(x-6)(x-8)(x-10) + \frac{3}{-96}(x-2)(x-6)(x-8)(x-10) + \frac{8}{64}(x-2)(x-4)(x-8)(x-10) -$$

$$-\frac{6}{96}(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)+\frac{0}{384}(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)=$$

$$=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640).$$

Il s'ensuit que la courbe cherchée est la parabole d'ordre 4

$$y=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640).$$

1012. On donne les points (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Former l'équation du polynôme qui prend les valeurs données pour les valeurs correspondantes de la variable indépendante.

Réponse. $y=-\frac{1}{3}(2x^3-15x^2+25x-9)$.

1013. Former le polynôme qui prend les valeurs figurant au tableau ci-dessous

x	1	3	4	6
y	−7	5	8	14

Réponse. $y=\frac{1}{5}(x^3-13x^2+69x-92)$.

1014. Former le polynôme dont la courbe représentative passe par les points (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

Réponse. $y=2x-1$.

2. Formule d'interpolation de Newton. Soient $y_0, y_1, y_2, \ldots$ les valeurs prises par une certaine fonction $y=f(x)$ lorsque la variable indépendante prend les valeurs équidistantes $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (c'est-à-dire $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k=\text{const}$).

Introduisons les notations suivantes: $y_1-y_0=\Delta y_0$, $y_2-y_1=\Delta y_1, \ldots$ $\ldots, y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1}$ sont les différences de premier ordre de la fonction donnée;

$\Delta y_1-\Delta y_0=\Delta^2 y_0$, $\Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1, \ldots$ sont les différences d'ordre 2;

$\Delta^n y_1-\Delta^n y_0=\Delta^{n+1}y_0$, $\Delta^n y_2-\Delta^n y_1=\Delta^{n+1}y_1$ sont les différences d'ordre $(n+1)$.

En effectuant des substitutions successives, on obtient:

$$\Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0, \qquad \Delta^3 y_0=y_3-3y_2+3y_1-y_0, \ldots,$$

$$\Delta^n y_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot y_{n-k}.$$

D'une façon analogue, on a

$$y_1=y_0+\Delta y_0, \quad y_2=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0, \quad y_3=y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0, \ldots,$$

$$y_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k y_0=(1+\Delta)^n\cdot y_0=y_0+n\Delta y_0+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\Delta^n y_0. \qquad (*)$$

Ecrivons le tableau des différences:

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & y_0 & & & \\
x_1 & y_1 & \Delta y_0 & & \\
 & & & \Delta^2 y_0 & \\
x_2 & y_2 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 \\
 & & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\
x_3 & y_3 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 \\
 & & & \Delta^2 y_2 & \\
x_4 & y_4 & \Delta y_3 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Si l'on admet que n figurant dans la formule (*) ne soit pas obligatoirement un entier positif, et qu'il puisse prendre n'importe quelle valeur $n = t$, on obtient alors la *formule d'interpolation de Newton*

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^t y_0.$$

La fonction de t obtenue prend la valeur y_0 pour $t = 0$, y_1 pour $t = 1$, y_2 pour $t = 2$, et ainsi de suite. Etant donné que la valeur suivante de la variable indépendante x, à pas h constant, est donnée par la formule $x_n = x_0 + nh$, alors $n = \frac{x_n - x_0}{h}$. Ainsi, en posant $x = x_0 + th$, c'est-à-dire $t = \frac{x - x_0}{h}$, écrivons la formule (*) comme suit

$$y_n = y_0 \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots$$

1015. En partant des données du tableau ci-dessous

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

trouver la valeur de y pour $x = 3{,}1$ à l'aide de la formule d'interpolation de Newton.

S o l u t i o n. On forme le tableau des différences:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3			
		4		
2	7		2	
		6		0
3	13		2	
		8		0
4	21		2	
		10		0
5	31		2	
		12		0
6	43		2	
		14		
7	57			

$$\text{Ici, } x_0 = 3,$$
$$x = 3{,}1,$$
$$h = 1.$$

Alors $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3{,}1 - 3}{1} = 0{,}1$. Ecrivons le polynôme d'interpolation de Newton correspondant au cas donné:

$$y = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0,$$

ou

$$y = 13 + 0{,}1 \cdot 8 + \frac{0{,}1\,(0{,}1-1)}{2} \cdot 2 = 13{,}71.$$

Par conséquent, lorsque $x = 3{,}1$ et $y = 13{,}71$, le polynôme d'interpolation du tableau donné sera

$$y = 3 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2 = x^2 + x + 1.$$

1016. Ci-dessous sont donnés les logarithmes décimaux d'une série de nombres:

lg 2,0 = 0,30103,	lg 2,3 = 0,36173,
lg 2,1 = 0,32222	lg 2,4 = 0,38021
lg 2,2 = 0,34242,	lg 2,5 = 0,39794.

En utilisant la formule d'interpolation de Newton, trouver lg 2,03.

S o l u t i o n. On forme le tableau des différences:

x	$\lg x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
2,0	0,30103					
		2119				
2,1	0,32222		—99			
		2020		10		
2,2	0,34242		—89		—4	
		1931		6		6
2,3	0,36173		—83		2	
		1848		8		
2,4	0,38021		—75			
		1773				
2,5	0,39794					

Ici, $x_0 = 2{,}0$, $x = 2{,}03$, $h = 0{,}1$. Alors $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2{,}03 - 2{,}0}{0{,}1} = 0{,}3$. D'où

$$y = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \Delta^5 y_0 =$$

$$= 0{,}30103 + 0{,}3 \cdot 0{,}02119 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}00099 +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}00010 + \frac{1}{24} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot 2{,}7 \cdot 0{,}00004 +$$

$$+ \frac{1}{120} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot 2{,}7 \cdot 3{,}7 \cdot 0{,}00006 = 0{,}30750.$$

On obtient ainsi lg 2,03 = 0,30750. Dans les tables des logarithmes à cinq décimales on trouve exactement la même valeur.

1017. On donne les logarithmes à cinq décimales des nombres entiers de 4 à 10. Calculer à l'aide de la formule d'interpolation de Newton les logarithmes à quatre décimales des nombres 6,5 à 7,0 de 1/10 en 1/10.

Réponse.

x	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
lg x	0,8129	0,8195	0,8261	0,8325	0,8388	0,8451

1018. Trouver le carré du nombre 6,25 si l'on connaît les carrés des nombres 5, 6, 7, 8.

Réponse. 39,0625.

1019. Former le polynôme d'interpolation de Newton pour la fonction donnée par le tableau

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

Réponse. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

§ 3. Calcul approché des intégrales définies

Soient $f(x)$ une fonction continue et différentiable un nombre suffisamment grand de fois sur le segment $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $y_k = f(x_k)$. Dans ce cas, les formules suivantes sont valables:

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n$$

ou

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + R_n.$$

Ce sont les *formules des rectangles* dont l'erreur limite absolue a pour expression

$$R_n \leqslant \frac{h}{2}(b-a)\cdot M_1, \quad \text{où} \quad M_1 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|;$$

2) $$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n.$$

C'est la *formule des trapèzes* dont l'erreur limite absolue

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)\,M_2, \quad \text{où} \quad M_2 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$$

(la valeur exacte de l'erreur de la formule des trapèzes est $\delta_t = -\frac{h^2}{12}(b-a)\,f''(c)$, où $a < c < b$);

3) en posant $n = 2k$, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2})] + R_n.$$

C'est la *formule de Simpson* qui est caractérisée par l'erreur limite absolue

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)\,M_3, \quad \text{où} \quad M_3 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{\mathrm{IV}}(x)|$$

(la valeur exacte de l'erreur commise, lors de l'utilisation de la formule de Simpson, est $\delta_S = -\frac{h^4}{180}(b-a)\,f^{\mathrm{IV}}(c)$, où $a < c < b$).

Lorsque la dérivée 4-ième de la fonction figurant sous le signe d'intégration est difficile à prendre, pour évaluer l'erreur de calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ d'après la formule de Simpson, $h = \frac{b-a}{n}$ étant choisi, on peut utiliser, si $n = 4k$, la méthode suivante.

On calcule la valeur approchée de l'intégrale donnée d'après la formule de Simpson dans laquelle on pose $h=\frac{b-a}{4k}$; soit I_1 la valeur ainsi trouvée de l'intégrale; ensuite, on double le pas et l'on applique à nouveau la formule de Simpson, cette fois-ci pour le pas $h_1=\frac{b-a}{2k}$; soit I_2 la nouvelle valeur de l'intégrale; l'erreur de la seconde étape est approximativement 16 fois plus grande que l'erreur de la première étape, toutes les deux ayant le même signe. C'est pourquoi l'erreur de la première étape $\left(\text{pour le pas } h=\frac{b-a}{4k}\right)$ sera approximativement donnée par la formule (on tient compte également du signe de l'erreur):

$$\delta_S \approx \frac{I_1-I_2}{15}$$

(cette méthode peut être appelée évaluation de l'erreur de la formule de Simpson par doublement du pas de calcul).

1020. Calculer $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ par la formule des rectangles, en décomposant l'intervalle d'intégration en dix parties. Evaluer l'erreur commise.

Solution. Ici, $y=\sqrt{x}$; pour $n=10$, $h=\frac{2-1}{10}=0{,}1$. Les valeurs successives de x seront: $x_0=1$, $x_1=x_0+h=1{,}1$, $x_2=1{,}2$, $x_3=1{,}3$, $x_4=1{,}4$, $x_5=1{,}5$, $x_6=1{,}6$, $x_7=1{,}7$, $x_8=1{,}8$, $x_9=1{,}9$.

Alors

$$y_0=\sqrt{x_0}=\sqrt{1}=1,\quad y_1=\sqrt{1{,}1}=1{,}049,\quad y_2=\sqrt{1{,}2}=1{,}095,$$
$$y_3=\sqrt{1{,}3}=1{,}140,\quad y_4=\sqrt{1{,}4}=1{,}183,\quad y_5=\sqrt{1{,}5}=1{,}225,$$
$$y_6=\sqrt{1{,}6}=1{,}265,\quad y_7=\sqrt{1{,}7}=1{,}304,\quad y_8=\sqrt{1{,}8}=1{,}342,$$
$$y_9=\sqrt{1{,}9}=1{,}378.$$

Par conséquent,

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \cong 0{,}1\,(1{,}000+1{,}049+1{,}095+1{,}140+1{,}183+$$
$$+1{,}225+1{,}265+1{,}304+1{,}342+1{,}378)=0{,}1\cdot 11{,}981\approx 1{,}20.$$

Evaluons l'erreur. Dans notre cas, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur le segment $[1, 2]$ atteint sa valeur maximum égale à 0,5 lorsque $x=1$. De cette façon, $|f'(x)|\leqslant M_1=\frac{1}{2}$. D'où, en appliquant la formule donnée ci-avant pour l'erreur limite absolue commise par la formule

des rectangles, on trouve

$$R_n \leqslant \frac{h}{2}(b-a)\,M_1 = \frac{0,1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 0,025.$$

Par conséquent, $\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1,20 \pm 0,025.$

Comparons le résultat obtenu par celui donné par la formule de Newton-Leibniz :

$$\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx = \int\limits_1^2 x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \cong 1,219.$$

On voit en effet que la valeur vraie de l'intégrale se situe dans l'intervalle trouvé ci-dessus.

1021. Calculer la même intégrale à l'aide de la formule des trapèzes, en posant $n = 10$; évaluer l'erreur.

Solution. Les notations restant les mêmes, on a

$$\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx = 0,1\cdot\left(\frac{1+1,414}{2} + 1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + \right.$$

$$\left. + 1,225 + 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,378\right) = 1,218.$$

Ensuite, $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$; $|f''(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ sur le segment [1, 2]. De cette façon, d'après la formule mentionnée plus haut, on trouve

$$R_n \leqslant \frac{0,1}{12}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} \approx 0,002.$$

Donc, $\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1,218 \pm 0,002.$

1022. Calculer à 0,001 près l'intégrale $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ d'après la formule de Simpson.

Solution. A l'aide de la formule $R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)\cdot|f^{\mathrm{IV}}(c)|$, trouvons tout d'abord la valeur de h qui assure le degré de précision nécessaire. On a :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}; \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

$$f'''(x) = -\frac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{12x^2-3}{\sqrt{(1+x^2)^7}}.$$

La valeur maximum de $|f^{IV}(x)|$ est atteinte sur le segment $[0, 1]$ au point $x = 0$: $|f^{IV}(0)| = 3$. Pour cette raison, $R_n \leqslant \leqslant \frac{h^4}{180} \cdot 1 \cdot 3$. Pour que cette erreur soit inférieure à 0,001,

$$\frac{h^4}{60} \leqslant 0{,}001; \quad h^4 \leqslant 0{,}06.$$

On peut prendre $h = 0{,}5$ (pour $h = 0{,}5$, $h^4 = 0{,}0625$), c'est-à-dire un peu plus de la valeur nécessaire. Toutefois, la précision du calcul ne sera pas influencée, car l'évaluation a été faite à l'aide de l'erreur limite absolue qui, évidemment, est plus grande que l'erreur effective. Ainsi, le degré de précision requis peut être atteint en décomposant l'intervalle d'intégration en deux parties.

Calculons les valeurs prises par la fonction $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ pour $x = 0$; $0{,}5$; 1:

$$f(0) = 1{,}0000; \quad f(0{,}5) = 1{,}1180; \quad f(1{,}0) = 1{,}4142$$

(les calculs sont effectués avec un chiffre de réserve). C'est pourquoi

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{0{,}5}{3} \cdot [1{,}0000 + 4 \cdot 1{,}1180 + 1{,}4142] = 1{,}1477.$$

De cette façon, en arrondissant le dernier chiffre, on trouve

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 1{,}148.$$

Pour comparer les résultats, calculons la valeur exacte de cette intégrale à l'aide de la formule de Newton-Leibniz:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

Mais $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$; $\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0{,}8814$; c'est pourquoi $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 1{,}1478$. Ainsi, la valeur de notre intégrale calculée à quatre décimales d'après la formule de Newton-Leibniz est:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 1{,}1478.$$

On voit que la valeur de l'intégrale calculée par la formule de Simpson est donnée non seulement avec trois, mais aussi avec quatre décimales exactes.

1023. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ par la formule de Simpson, en posant $n = 8$. Les calculs doivent être effectués à six décimales. Evaluer l'erreur du résultat obtenu à l'aide de la méthode de doublement du pas de calcul; comparer le résultat avec la valeur vraie de l'intégrale prise avec un chiffre de réserve (septième décimale).

Solution. Les valeurs prises par la fonction sous le signe d'intégration doivent être déterminées pour les valeurs suivantes de la variable indépendante ($h_1 = 0{,}125$): $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}125$; ... ...; $x_8 = 1{,}0$. On trouve les valeurs correspondantes de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$y_0 = 1{,}000000; \quad y_1 = 0{,}984625; \quad y_2 = 0{,}941176;$$
$$y_3 = 0{,}876712; \quad y_4 = 0{,}800000; \quad y_5 = 0{,}719101;$$
$$y_6 = 0{,}640000; \quad y_7 = 0{,}566389; \quad y_8 = 0{,}500000.$$

Portons ces valeurs dans la formule de Simpson pour $h_1 = 0{,}125$ et $h_2 = 0{,}250$:

$$I_1 = \frac{h_1}{3}[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] =$$
$$= \frac{0{,}125}{3}\cdot[1{,}000000 + 0{,}500000 + 4(0{,}984615 + 0{,}876712 +$$
$$+ 0{,}719101 + 0{,}566371) + 2\cdot(0{,}941176 + 0{,}800000 + 0{,}640000)] =$$
$$= \frac{1}{24}\cdot 18{,}849548 \approx 0{,}785398;$$
$$I_2 = \frac{h_2}{3}[y_0 + y_8 + 4(y_2 + y_6) + 2y_4] =$$
$$= \frac{0{,}25}{3}\cdot[1{,}000000 + 0{,}500000 + 4(0{,}941176 + 0{,}640000) +$$
$$+ 2\cdot 0{,}800000] = \frac{1}{12}\cdot 9{,}424704 = 0{,}785392.$$

D'où

$$\delta I_1 \approx \frac{I_1 - I_2}{15} = \frac{0{,}000006}{15} \approx 0{,}0000004.$$

Ainsi, les six décimales de I_1 doivent être exactes. La valeur vraie de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853979, \ldots,$$

ce qui confirme le résultat trouvé.

1024. Calculer à 0,0001 près la valeur de l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ à l'aide de la formule de Simpson.

Réponse. On prend $n = 10$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \approx 0{,}50001 \approx 0{,}5000$.

1025. Calculer par la formule de Simpson l'intégrale $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ pour $n = 8$. Evaluer l'erreur par la méthode de doublement du pas de calcul; comparer la valeur trouvée avec la valeur vraie de l'intégrale. Effectuer les calculs à cinq décimales.

Réponse. Pour $n = 8$, $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} \approx 1{,}16912$; $\delta_S = -0{,}000004$; la valeur exacte de l'intégrale est $4(\sqrt{2} - 1) - 2 \ln \frac{2\sqrt{2}+1}{3} \approx$ $\approx 1{,}16912 \ldots$

1026. A l'aide de la formule des trapèzes, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$$

pour $n = 6$; évaluer au préalable l'erreur pour savoir à combien de chiffres (avec un chiffre de réserve) il faut effectuer les calculs.

Réponse. Pour $n = 6$, $|\delta_t| \leqslant \frac{h^2}{12} \cdot (b - a) \cdot M_1 \approx 0{,}007$ (M_1 est la valeur maximum de $|f''(x)|$ sur l'intervalle d'intégration). Cela signifie que les calculs seront effectués à trois décimales (pour obtenir deux décimales exactes):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx \approx 1{,}35.$$

1027. Calculer à 0,01 près $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ par la formule des trapèzes.

Réponse. Poser $n = 5$; $\ln 2 \approx 0{,}69$.

1028. Calculer à 0,01 près l'intégrale $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ par la formule de Simpson.

Réponse. Poser $n=4$; $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \approx 0{,}24$.

1029. Calculer à 0,01 près l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à l'aide de la formule des trapèzes.

Réponse. Poser $n=4$; $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0{,}75$.

1030. Calculer à 0,01 près l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$ par la formule des trapèzes

Réponse. Poser $n=6$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx \approx 0{,}67$.

§ 4. Intégration numérique des équations différentielles

1. Méthode d'Euler. Une équation différentielle $y' = f(x, y)$ définit dans le plan un ainsi appelé *champ de directions*, ce qui signifie qu'en chaque point d'existence de la fonction $f(x, y)$ dans le plan elle définit la direction de la courbe intégrale correspondante passant par ce point. Supposons que l'on demande de résoudre le problème de Cauchy, c'est-à-dire de trouver la solution de l'équation $y' = f(x, y)$ vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$. Décomposons le segment $[x_0, X]$ en n parties égales et posons $\frac{X-x_0}{n}=h$ ($X = x_0+n\cdot h$, h étant le pas de variation de la variable indépendante). Admettons maintenant qu'à l'intérieur de l'intervalle élémentaire s'étalant de x_0 à $x_0 + h$ la fonction y' conserve une valeur constante $f(x_0, y_0)$. Alors on a $y_1 - y_0 \approx h\cdot f(x_0, y_0)$, où y_1 est la valeur de la fonction cherchée correspondant à $x_1 = x_0 + h$. D'où l'on tire $y_1 \approx y_0 + h\cdot f(x_0, y_0)$. En répétant cette opération, on obtient les valeurs successives de la fonction :

$$
\begin{aligned}
y_2 &\approx y_1+h\cdot f(x_1, y_1),\\
y_3 &\approx y_2+h\cdot f(x_2, y_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
y_{k+1} &\approx y_k+h\cdot f(x_k, y_k).
\end{aligned}
$$

On arrive ainsi à construire d'une façon approchée la courbe intégrale sous la forme d'une ligne brisée ayant comme sommets les points M_k $(x_k;\ y_k)$, où

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \qquad y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k,\ y_k).$$

C'est la *méthode des lignes brisées d'Euler*, ou tout court la *méthode d'Euler*.

1031. Trouver la valeur de la fonction y définie par l'équation différentielle $y' = \frac{y-x}{y+x}$ pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et en posant $h = 0{,}1$. Utiliser à cette fin la méthode d'Euler. Se limiter aux premières quatre valeurs de la fonction en question.

Solution. Pour $h = 0{,}1$, les valeurs successives de la variable indépendante seront $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, ... Calculons les valeurs respectives de la fonction cherchée:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,\ y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 1{,}1.$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,\ y_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot \frac{1{,}1-0{,}1}{1{,}1+0{,}1} = 1{,}183,$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2,\ y_2) = 1{,}183 + 0{,}1 \cdot \frac{1{,}183-0{,}2}{1{,}183+0{,}2} = 1{,}254,$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3,\ y_3) = 1{,}254 + 0{,}1 \cdot \frac{1{,}254-0{,}3}{1{,}254+0{,}3} = 1{,}315,$$

. . . . . .

On obtient ainsi le tableau ci-dessous:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

1032. Trouver par la méthode d'Euler quatre valeurs de la fonction y définie par l'équation $y' = x + y$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$ et $h = 0{,}1$.

Solution. Les valeurs prises par la variable indépendante seront: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, ... Les valeurs correspondantes de y seront:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,\ y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (0 + 1) = 1{,}1,$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,\ y_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22,$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2,\ y_2) = 1{,}22 + 0{,}1 \cdot (0{,}2 + 1{,}22) = 1{,}36,$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3,\ y_3) = 1{,}36 + 0{,}1\ (0{,}3 + 1{,}36) = 1{,}52,$$

. . . . . .

On obtient le tableau

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

1033. Trouver par la méthode d'Euler les valeurs numériques de la fonction y (trois valeurs) définie par l'équation $y' = 1 + x + y^2$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$ et en posant $h = 0{,}1$.

Réponse.

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,2	1,45	1,78

1034. Trouver à l'aide de la méthode d'Euler quatre valeurs de la fonction y définie par l'équation $y' = x^2 + y^3$, les conditions initiales étant $y(0) = 0$ et en posant $h = 0{,}1$.

Réponse.

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,001	0,005	0,014

1035. A l'aide de la méthode d'Euler, trouver la solution numérique de l'équation $y' = y^2 + \frac{y}{x}$, les conditions initiales étant $y(2) = 4$ et en posant $h = 0{,}1$ (quatre valeurs).

Réponse.

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y	4	5,8	9,44	18,78	54,86

1036. Trouver par la méthode d'Euler la solution numérique de l'équation $y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$ sur le segment $[0, 1]$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$ et en posant $h = 0{,}2$.

Réponse.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
y	1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,27	1,24

1037. Trouver par la méthode d'Euler la solution numérique du système d'équations

$$\frac{dx}{dt}=\frac{y-x}{t},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{x+y}{t}$$

les conditions initiales étant $x(1)=1$, $y(1)=1$, $1\leqslant t\leqslant 2$, et en posant $h=0{,}2$.

Réponse.

t	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
x	1	1	1,07	1,17	1,30	1,45
y	1	1,4	1,8	2,21	2,63	3,06

2. Méthode de Runge-Kutta. Soit y une fonction définie par l'équation différentielle $y'=f(x, y)$, les conditions initiales étant $y(x_0)=y_0$. En effectuant l'intégration numérique d'une pareille équation par la méthode de Runge-Kutta, on détermine quatre nombres:

$$k_1=h\cdot f(x, y),\quad k_2=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_2}{2}\right),\quad k_4=h\cdot f(x+h,\ y+k_3).$$

Si l'on pose $y(x+h)=y(x)+\Delta y$, on peut démontrer que $\Delta y\approx\approx\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$. On obtient le schéma de calcul suivant:

x	y	$k_j=h\cdot f(x, y)$	Supplément
x_0	y_0	k_1	$\Delta y_0=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$
$x_0+\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}k_1$	k_2	

Suite

x	y	$k_j = h \cdot f(x, y)$	Supplément
$x_0 + \frac{1}{2} h$	$y_0 + \frac{1}{2} k_2$	k_3	
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	k_4	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + k$		

1038. Former le tableau des valeurs de la fonction y définie par l'équation $y' = y - \frac{2x}{y}$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$ sur le segment $[0, 1]$ et le pas $h = 0{,}2$ (la solution exacte est $y = \sqrt{2x + 1}$).

Solution. Trouvons les nombres:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1; 1{,}1) =$$

$$= 0{,}2 \cdot \left(1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right) = 0{,}1836;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1; 1{,}0918) = 0{,}1817;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2; 1{,}1817) = 0{,}1686.$$

D'où

$$\Delta y = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$$

De cette façon, $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ pour $x = 0{,}2$. Le même schéma nous permet de trouver y_2 et ainsi de suite. Le calcul est effectué comme indiqué sur le tableau ci-dessous:

i	x	y	$f(x, y)$	$k_i = h \cdot f(x, y)$	Δy
1	0	1	1	0,2	0.1832
2	0,1	1,1	0,0918	0,1838	
3	0,1	1,0918	0,0908	0,1817	
4	0,2	1,1817	0,0843	0,1686	

Suite

i	x	y	$f(x, y)$	$k_i = h \cdot f(x, y)$	Δy
1	0,2	1,1832	0,8451	0,1690	1,1584
2	0,3	1,2677	0,7944	0,1589	
3	0,3	1,2626	0,7874	0,1575	
4	0,4	1,3407	0,7440	0,1488	
1	0,4	1,3416	0,7453	0,1491	
2					
3					
4					
1					

On remarquera que $y_1 = 1{,}1832$ et $y_2 = 1{,}3416$ ont tous leurs cinq chiffres exacts si l'on les compare avec la solution exacte $y = \sqrt{2x+1}$.

1039. A l'aide de la méthode de Runge-Kutta intégrer l'équation $x^2y' - xy = 1$, les conditions initiales étant $y(1) = 0$ sur le segment $[1, 2]$ et le pas $h = 0{,}2$ $\left(\text{la solution exacte } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)$.

Solution. Ici $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$. Trouvons les nombres:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1^2}\right) = 0{,}2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1^2}\right) = 0{,}18;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}09}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1^2}\right) = 0{,}18;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}18}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}2^2}\right) = 0{,}17;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}18.$$

Ainsi, l'on a $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0{,}18 = 0{,}18$. On trouve la deuxième valeur de y:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0{,}2\left(\frac{0{,}18}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}2^2}\right) = 0{,}17;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2\left(\frac{0{,}26}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2}\right) = 0{,}15;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2\left(\frac{0{,}25}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2}\right) = 0{,}15;$$

$$k_4 = h \cdot f(x+h,\ y+k_3) = 0{,}2\left(\frac{0{,}33}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}4^2}\right) = 0{,}14\ ;$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}15.$$

Par conséquent, $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0{,}18 + 0{,}15 = 0{,}33$, et ainsi de suite.

1040. Intégrer par la méthode de Runge-Kutta l'équation $4y' = y^2 + 4x^2$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$ sur le segment $[0, 1]$ et le pas $h = 0{,}1$. Effectuer les calculs à trois décimales exactes.

Réponse.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	−1	−0,975	−0,949	−0,921	−0,888	−0,842

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	−0,802	−0,744	−0,675	−0,593	−0,495

1041. Intégrer par la méthode de Runge-Kutta l'équation $y' = \frac{x}{y} + 0{,}5y$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$ sur le segment $[0, 1]$ et le pas $h = 0{,}1$. Effectuer les calculs à trois chiffres exacts.

Réponse.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	1,05	1,12	1,20	1,29	1,39	1,50	1,62	1,75	1,89	2,03

3. Méthode d'Adams. On demande d'intégrer l'équation $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Une des méthodes des différences permettant de trouver la solution approchée de ce problème est la *méthode d'Adams.*

En prenant un certain pas h de variation de la variable indépendante, on trouve par telle ou telle méthode et compte tenu des conditions initiales $y(x_0) = y_0$ les trois valeurs suivantes de la fonction cherchée $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_0 + 2h), \quad y_3 = y(x_0 + 3h)$$

(ces trois valeurs peuvent être calculées par n'importe quelle méthode assurant la précision requise: en développant la solution en série entière, par la méthode de Runge-Kutta, etc.; la méthode d'Euler ne peut pas être utilisée vu sa précision insuffisante). A l'aide des nombres x_0, x_1, x_2, x_3 et y_0, y_1, y_2, y_3, on calcule

les grandeurs q_0, q_1, q_2, q_3, où :

$$q_0 = h \cdot y_0' = h \cdot f(x_0, y_0), \qquad q_2 = h \cdot f(x_2, y_2)$$
$$q = {}_1h \cdot f(x_1, y_1), \qquad q_3 = h \cdot f(x_3, y_3).$$

Ensuite, on forme le tableau des différences finies des grandeurs y et q :

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		Δq_0		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			
x_4						
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_n						

La connaissance des nombres de la diagonale inférieure nous permet de trouver Δy_3 par la formule d'Adams

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0,$$

pour calculer ensuite $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Si l'on connaît y_4, on peut calculer $q_4 = h \cdot f(x_4, y_4)$, ce qui permet d'écrire la diagonale suivante :

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3, \quad \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2, \quad \Delta^3 q_1 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1.$$

La nouvelle diagonale donne la possibilité de calculer par la formule d'Adams la valeur de $\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1$, donc $y_5 = y_4 + \Delta y_4$, et ainsi de suite.

1042. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = -1$. Trouver la valeur de $y(0{,}4)$ à 0,01 près.

Solution. On cherche les premiers quatre termes du développement en série de Taylor de la solution de l'équation donnée au voisinage du point $x = 0$:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)\cdot x^3 + \ldots;$$

$y(0) = -1$; les grandeurs $y'(0)$, $y''(0)$ et $y'''(0)$ sont trouvées par dérivations successives de l'équation donnée:

$$y' = x^2 + y^2; \quad y'(0) = 0^2 + (-1)^2 = 1,$$
$$y'' = 2x + 2yy'; \quad y''(0) = 0 + 2\cdot(-1)\cdot 1 = -2,$$
$$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'';$$
$$y'''(0) = 2 + 2\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot(-2) = 8.$$

De cette façon, $y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots$

On calcule $y(x)$ aux points $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$ avec un chiffre (troisième décimale) de réserve:

$$y_1 = -0{,}909, \quad y_2 = -0{,}829, \quad y_3 = -0{,}754.$$

Formons le tableau

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
0	−1		0,1			
		0,091		−0,017		
0,1	−0,909		0,083		0,006	
		0,080		−0,011		−0,002
−0,2	−0,829		0,072		0,004	
		0,075		−0,007		
0,3	−0,754		0,065			
0,4						

Alors

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 = 0{,}065 + \frac{1}{2}(-0{,}007) +$$
$$+ \frac{5}{12}\cdot 0{,}004 + \frac{3}{8}\cdot(-0{,}002) = 0{,}062.$$

Donc $y_4 = y_3 + \Delta y_3 \approx -0{,}754 + 0{,}062 = -0{,}692 \approx -0{,}69$.

1043. $y' = x + y$, $y(0) = 1$. Calculer $y(x)|_{x=0,5}$ par la méthode d'Adams en posant $h = 0,1$ (effectuer les calculs à 0,001 près, le résultat devant contenir deux décimales).

Réponse. 1,78.

1044. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$. Calculer $y(x)|_{x=0,4}$ par la méthode d'Adams en posant $h = 0,1$ (effectuer les calculs avec le degré de précision indiqué au problème précédent).

Réponse. 0,02.

§ 5. Méthode des approximations successives de Picard

La *méthode des approximations successives de Picard* représente une autre méthode analytique qui permet de trouver la solution approchée des équations différentielles. S'il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

à conditions initiales $y(x_0) = y_0$, la méthode consiste en la construction de la solution cherchée $y = y(x)$ pour $x \geqslant x_0$ (ou $x \leqslant x_0$). En intégrant le premier et le deuxième membres de l'équation (1) de x_0 à x, on obtient

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt,$$

ou:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt. \tag{2}$$

On suppose que dans un certain voisinage du point (x_0, y_0) l'équation (1) satisfasse aux conditions du théorème d'existence et d'unicité (théorème de Cauchy), c'est-à-dire que $f(x, y)$ est une fonction continue de ses variables et que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K$.

Pour trouver les approximations successives, on substitue la valeur donnée y_0 à la fonction inconnue y dans l'égalité (2) et l'on obtient ainsi la première approximation

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt.$$

La deuxième approximation est obtenue en portant dans l'égalité (2) la valeur trouvée y_1 (à la place de la fonction inconnue y)

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt.$$

Toutes les autres approximations sont trouvées par la formule

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

De cette façon, on aura

$$y(x) \approx y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt.$$

On démontre que

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x).$$

[L'erreur est évaluée à l'aide de l'inégalité

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{M(Kc)^n}{K \cdot n!}, \quad \text{où} \quad |f(x, y)| \leqslant M,$$

$$|x - x_0| < a \leqslant \infty, \quad |y - y_0| < b \leqslant \infty, \quad c = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).\ ]$$

Les approximations de Picard donnent une suite de fonctions inférieures

$$y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < y(x),$$

si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ et $f(x, y_0) > 0$; mais si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ et $f(x, y_0) < 0$, elles aboutissent à une suite de fonctions supérieures, c'est-à-dire

$$y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y(x).$$

Autrement dit, lorsque $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, les approximations de Picard forment une *suite d'approximations unilatérale.*

Si $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, les approximations de Picard forment une *suite d'approximations bilatérale.*

1045. Trouver la solution approchée de l'équation $y' = x + y^2$ qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 1$.

Solution. Prenons $y_0 = y(0) = 1$ en qualité d'approximation de départ. Dans ce cas, la première approximation sera

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t + 1)\, dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

D'une façon analogue on obtient la deuxième approximation

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[t + \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right)^2\right] dt =$$

$$= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{20}x^5,$$

. . . . . .

1046. Trouver la suite d'approximations de Picard exprimant la solution de l'équation $y' = x + y$ qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 0$ pour $x \geqslant 0$.

Solution. En qualité d'approximation de départ on prend $y_0 = y(0) = 0$. Alors

$$y_1 = y_0 + \int_0^x (t + y_0)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2,$$

$$y_2 = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}t^2\right)dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3 = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right)dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$

. . . . . .

$$y_n(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right)dt =$$

$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ici, $f(x, y_0) = x + y_0 \geqslant 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 > 0$. Par conséquent, la suite d'approximations de Picard

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad y_2 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \quad y_3 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \ldots,$$

$$y_n = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

forme une suite de fonctions inférieures.

L'expression analytique vraie de $y(x)$ du problème examiné est

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) - (x+1),$$

ou

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

1047. Trouver trois approximations successives de la solution de l'équation $y' = x^2 + y^2$ satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = 0$ si l'on prend comme approximation de départ $y = 0$.

Réponse. $y_1 = \frac{1}{3}x^3$, $y_2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7$,

$$y_3 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.$$

1048. Trouver la solution approchée de l'équation $y' + y \cdot \operatorname{ch} x = 0$ satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = 1$.

Réponse. $y = e^{-\operatorname{sh} x}$.

1049. Trouver la solution approchée et déterminer le caractère des approximations de Picard de l'équation $y' = x - y$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$, $x \geqslant 0$.

Réponse. $y_n = 1 - x + 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}\right] + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

($n = 3, 4, 5, \ldots$); c'est une succession bilatérale.

1050. Trouver la solution approchée de l'équation $y' = y \cdot \cos x$, les conditions initiales étant $y(0) = 1$, $-2 < x < 2$. Déterminer le caractère des approximations de Picard.

Réponse. $y_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin^m x}{m!}$; la solution vraie est $y(x) = e^{\sin x}$; c'est une succession de fonctions inférieures.

1051. Trouver la solution approchée de l'équation $y' = 2xy \cos(x^2)$ satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$. Déterminer le caractère des approximations de Picard.

Réponse. $y_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin^m (x^2)}{m!}$ la solution vraie est $y(x) = e^{\sin(x^2)}$; c'est une suite de fonctions inférieures.

§ 6. Méthodes élémentaires de traitement des données expérimentales

1. Méthode graphique. Supposons que l'on ait résumé dans un tableau les données obtenues à la suite d'une expérience. Construisons maintenant le graphique passant par les points définis par les données de ce tableau (ou par les points voisins) et choisissons la formule empirique qui convient le plus. Le plus simple des cas se présente lorsque les données expérimentales se traduisent par des points disposés à peu près sur une droite de la forme $y = a_0 + a_1 x$ ou bien sur des courbes des types $S = At^{\alpha}$ et $S = Ae^{\alpha t}$ dont les équations sont réduites à une fonction linéaire par un simple changement de variables. En résolvant ce problème par la méthode graphique, on porte les points dans le plan de coordonnées (à échelle linéaire ou logarithmique) pour tracer ensuite la droite correspondante de façon qu'elle passe par ces points ou aussi près que possible. Ceci fait, on prend deux points arbitraires, bien distants l'un de l'autre, sur la droite obtenue et l'on porte leurs coordonnées dans l'expression de la fonction linéaire $y = a_0 + a_1 x$. Les deux équations ainsi formées nous permettent de trouver a_0 et a_1.

1052. Dans le cas stationnaire, la diffusion thermique dans une tige mince isolée est décrite par la fonction linéaire $u = a_0 + a_1 x$.

Déterminer les constantes a_0 et a_1 à l'aide des températures mesurées en différents points de la tige et qui sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	0	2	6	8	10	14	16	20
u	32	29,2	23,3	19,9	17,2	11,3	7,8	2

Solution. La droite construite d'après les données du tableau passe par les points (0; 32) et (20; 2). En portant les coordonnées de ces points dans l'équation $u = a_0 + a_1x$, on obtient

$$\begin{cases} a_0 + 0 \cdot a_1 = 32, \\ a_0 + 20a_1 = 2; \end{cases} \quad a_0 = 32, \ a_1 = -1{,}5.$$

D'où l'on trouve la relation cherchée entre u et x : $u = 32 - 1{,}5x$. Pour se faire une idée du degré de fidélité avec laquelle cette formule traduit les données du tableau, il faut calculer la somme des écarts δ (et la somme des carrés de ces écarts) entre les valeurs de la fonction données par la formule et par le tableau.

Dans le cas examiné, $\delta = -1{,}5x + 32 - u$. Par conséquent,

$$\delta_1 = -1{,}5 \cdot 0 + 32 - 32 = 0;$$
$$\delta_2 = -1{,}5 \cdot 2 + 32 - 29{,}2 = -0{,}2;$$
$$\delta_3 = -1{,}5 \cdot 6 + 32 - 23{,}3 = -0{,}3;$$
$$\delta_4 = -1{,}5 \cdot 8 + 32 - 19{,}9 = 0{,}1;$$
$$\delta_5 = -1{,}5 \cdot 10 + 32 - 17{,}2 = -0{,}2;$$
$$\delta_6 = -1{,}5 \cdot 14 + 32 - 11{,}3 = -0{,}3;$$
$$\delta_7 = -1{,}5 \cdot 16 + 32 - 7{,}8 = -0{,}2;$$
$$\delta_8 = -1{,}5 \cdot 20 + 32 - 2 = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{8} \delta_i = -0{,}7; \quad \sum_{i=1}^{8} \delta_i^2 = 0{,}31.$$

1053. Les données du tableau ci-dessous vérifient la formule $S = At^{\alpha}$:

t	1	2	3	4	5	6	7
S	2,31	2,58	2,77	2,93	3,06	3,16	3,26

Trouver les valeurs de A et de α.

Solution. Prenons le logarithme de l'équation $S = At^{\alpha}$:

$$\lg S = \lg A + \alpha \cdot \lg t.$$

Si l'on pose $\lg S = y$; $\lg t = x$, $\lg A = a_0$, $\alpha = a_1$, on obtient

$$y = a_0 + a_1 x.$$

L'équation obtenue est représentée par une droite dont les paramètres seront trouvés en prenant deux de ses points (lg 1; lg 2,31) et (lg 7; lg 3,26). En substituant les coordonnées de ces points dans l'équation $y = \lg A + \alpha x$, on a

$$\begin{cases} \lg 2{,}31 = \lg A + \alpha \cdot \lg 1 \\ \lg 3{,}26 = \lg A + \alpha \cdot \lg 7 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lg A = 0{,}364, \\ \lg A + 0{,}845\alpha = 0{,}513. \end{cases}$$

D'où $\lg A = 0{,}364$, $A = 2{,}312$; $\alpha = \frac{0{,}149}{0{,}845} = 0{,}176$. Par conséquent, $S = 2{,}312t^{0{,}176}$.

1054. Les données du tableau ci-dessous

x	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
y	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

vérifient la formule $y = a_0 + a_1 x$. Trouver a_0 et a_1.

Réponse. $y = 0{,}279x + 71{,}14$.

1055. Les données du tableau ci-dessous

t	1	2	3	4	5	6	7	8
S	15,3	20,5	27,4	36,6	49,1	65,6	87,8	117,6

vérifient la formule $S = Ae^{\alpha t}$. Trouver A et α.

Réponse. $S = 11{,}58\, e^{0{,}2898t}$.

2. Méthode de centrage. Cette méthode est basée sur la supposition que la ligne pour laquelle la somme algébrique des écarts est nulle représente la meilleure solution. Pour trouver par cette méthode les constantes inconnues figurant dans la formule empirique, on porte d'abord dans celle-ci tous les couples de valeurs observées ou mesurées de x et de y et l'on obtient autant d'écarts qu'il y a des couples de valeurs (x, y) au tableau (l'écart est mesuré par la distance prise sur la verticale des points donnés à la courbe représentative de la fonction). Ensuite, on répartit ces écarts en autant de groupes qu'il y a des paramètres inconnus à trouver dans la formule empirique. Finalement, en égalant à zéro la somme des écarts de chaque groupe, on obtient un système d'équations linéaires qu'il faut résoudre par rapport aux paramètres inconnus.

1056. A l'aide de la méthode de centrage, trouver une formule du type $S = At^{\alpha}$ correspondant aux données du tableau ci-dessous

t	273	283	288	293	313	333	353	373
S	29,4	33,3	35,2	37,2	45,8	55,2	65,6	77,3

Solution. Dans ce cas, les écarts sont exprimés de la façon suivante $\delta = At^{\alpha} - S$. En substituant les valeurs de t et de S données dans le tableau et en égalant les écarts à zéro, on obtient un système d'équations dont la résolution par rapport aux paramètres A et α présente des difficultés. C'est pourquoi l'on égale à zéro la somme des écarts du logarithme de S, c'est-à-dire $\delta' = \lg A + \alpha \cdot \lg t - \lg S$ (la précision de calcul n'étant pas pour autant sensiblement touchée).

Les écarts s'expriment alors par les formules:

$$\mathrm{I}\begin{cases} \delta'_1 = \lg A + 2{,}4362\alpha - 1{,}4683, \\ \delta'_2 = \lg A + 2{,}4518\alpha - 1{,}5224, \\ \delta'_3 = \lg A + 2{,}4594\alpha - 1{,}5465, \\ \delta'_4 = \lg A + 2{,}4669\alpha - 1{,}5705. \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} \delta'_5 = \lg A + 2{,}4955\alpha - 1{,}6609, \\ \delta'_6 = \lg A + 2{,}5224\alpha - 1{,}7419, \\ \delta'_7 = \lg A + 2{,}5478\alpha - 1{,}8169, \\ \delta'_8 = \lg A + 2{,}5717\alpha - 1{,}8882. \end{cases}$$

En égalant à zéro les sommes des écarts dans les groupes I et II, on aboutit à un système de deux équations qui nous permet de trouver les paramètres A et α:

$$\begin{cases} 4 \lg A + 9{,}8143\alpha = 6{,}1077, \\ 4 \lg A + 10{,}1374\alpha = 7{,}1079. \end{cases}$$

La solution de ce système est $\alpha = 3{,}096$, $\lg A = \overline{7}{,}9345$; d'où $A = 8{,}5 \cdot 10^{-7}$.

De cette façon, $S = 8{,}6 \cdot 10^{-7}\, t^{3{,}096}$.

1057. On donne le tableau suivant:

x	87,5	84,0	77,8	63,7	46,7	36,9
y	292	283	270	235	197	181

Trouver les paramètres a_0, a_1, a_2 de la formule $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ vérifiée par les données de ce tableau.

Réponse. $y = 111{,}7 + 1{,}663x + 0{,}00437x^2$.

1058. Les données du tableau ci-dessous

t	53,92	26,36	14,00	6,99	4,28	2,75	1,85
S	6,86	14,70	28,83	60,40	101,9	163,3	250,3

vérifient la formule $S = At^{\alpha}$. Trouver A et α.

Réponse. $S = 33{,}02t^{1{,}065}$.

3. Choix des paramètres par la méthode des moindres carrés. 1) Dans la pratique, on se heurte souvent au problème suivant. On connaît n couples de valeurs que prennent deux grandeurs fonctionnellement liées entre elles x et y: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, . . ., $(x_n; y_n)$ et l'on demande de trouver m paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m < n)$ figurant dans une formule donnée à l'avance $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ de façon que les n couples de valeurs de x et de y conviennent le mieux.

La théorie des probabilités nous apprend que les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ qui sont les meilleures minimisent la somme

$$\sum_{k=1}^{k=n} [f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) - y_k]^2$$

(c'est-à-dire la somme des carrés des écarts des valeurs de y calculées par la formule par rapport aux valeurs données; d'où la dénomination de méthode des moindres carrés).

Cette condition permet de former un système de m équations d'où l'on tire $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} [f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) - y_k] \cdot \frac{\partial f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \quad (1)$$

Parfois, afin de simplifier la résolution du système (1), on est contraint à transformer la formule donnée $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, mais la précision de la solution ainsi obtenue s'en ressent (voir plus loin le choix des paramètres dans les formules $y = A \cdot e^{cx}$ et $y = Ax^q$).

Cas particuliers

a) $y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ (on a $m + 1$ paramètres: $a_0, a_1, \ldots, a_m$; $n > m + 1$).

Le système (1) prend la forme

$$\left\{\begin{array}{l} a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m-1} + \ldots + n\cdot a_m = \sum\limits_{k=1}^{k=n} y_k, \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k y_k, \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+2} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 y_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{2m} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{2m-1} + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m y_k. \end{array}\right. \tag{2}$$

Ce système de $m+1$ équations à $m+1$ inconnues admet toujours une solution unique, car son déterminant est différent de zéro.

Pour déterminer les coefficients du système (2), il est utile de composer le tableau auxiliaire ci-dessous:

k	x_k	x_k^2	x_k^3	...	x_k^{2m}	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$	...	$x_k^m y_k$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	...	x_1^{2m}	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$	...	$x_1^m \cdot y_1$
2	x_2	x_2^2	x_2^3	...	x_2^{2m}	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$	...	$x_2^m \cdot y_2$
.	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
.	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
n	x_n	x_n^2	x_n^3	...	x_n^{2m}	y_n	$x_n y_n$	$x_n^2 y_n$	...	$x_n^m y_n$
Σ										

Dans la dernière ligne, sont portées les sommes des éléments constituant les colonnes respectives. Ces sommes représentent les coefficients du système (2).

Le système (2) est d'habitude résolu par la méthode de Gauss.

b) $y = A\cdot e^{cx}$.

Pour simplifier le système (1), on prend au préalable le logarithme de la formule ci-dessus qui lie x et y:

$$\lg y = \lg A + c\cdot\lg e\cdot x.$$

Alors le système (1) prend la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} c\cdot\lg e\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k + n\cdot\lg A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lg y_k, \\ c\cdot\lg e\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 + \ln A\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k\cdot\lg y_k. \end{array}\right. \tag{3}$$

Le tableau auxiliaire sera:

k	x_k	x_k^2	$\lg y_k$	$x_k \lg y_k$
1	x_1	x_1^2	$\lg y_1$	$x_1 \cdot \lg y_1$
2	x_2	x_2^2	$\lg y_2$	$x_2 \cdot \lg y_2$
.	..	..	..	..
n	x_n	x_n^2	$\lg y_n$	$x_n \cdot \lg y_n$
Σ				

Le système (3) permet de trouver c et $\lg A$.

c) $y = Ax^q$.

Tout comme dans le cas précédent, on prend d'abord le logarithme de la formule donnée:

$$\lg y = \lg A + q \cdot \lg x.$$

Le système (1) prend alors la forme

$$\begin{cases} q \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lg x_k + n \cdot \lg A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lg y_k, \\ q \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lg^2 x_k + \lg A \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lg x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lg x_k \cdot \lg y_k. \end{cases}$$

Le tableau auxiliaire subit aussi les transformations qui s'imposent.

1059. A l'aide de la méthode des moindres carrés, choisir une fonction quadratique du type

$$\varphi(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

pour les valeurs de x et de y données:

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

Solution. Formons le tableau

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$
1	7	49	343	2401	7,4	51,8	362,6
2	8	64	512	4196	8,4	67,2	537,6
3	9	81	729	6561	9,1	81,9	737,1
4	10	100	1000	10000	9,4	94,0	940,0
5	11	121	1331	14641	9,5	104,5	1149,5
6	12	144	1728	20736	9,5	114,0	1368,0
7	13	169	2197	28561	9,4	122,2	1588,6
	70	728	7840	87096	62,7	635,6	6683,4

D'où l'on tire le système d'équations

$$\begin{cases} 728a_0 + 70a_1 + 7a_2 = 62{,}7, \\ 7840a_0 + 728a_1 + 70a_2 = 635{,}6, \\ 87096a_0 + 7840a_1 + 728a_2 = 6683{,}4. \end{cases}$$

La solution de ce système est: $a_0 = -0{,}04$, $a_1 = 1{,}10$, $a_2 = 2{,}12$. Ainsi, la fonction quadratique cherchée est de la forme

$$\varphi(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}10x + 2{,}12.$$

1060. Trouver un polynôme du second degré de la forme $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$ pour les valeurs de x et de y données ci-dessous. Résoudre le problème par la méthode des moindres carrés

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Réponse. $y = 1{,}009x^2 - 4{,}043y + 5{,}045$.

1061. Choisir par la méthode des moindres carrés une fonction linéaire $y_1 = a_0x + a_1$ correspondant aux données du tableau ci-dessous:

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

Réponse. $y = 3{,}023x - 1{,}08$.

1062. Choisir par la méthode des moindres carrés une fonction linéaire $y = a_0x + a_1$ correspondant aux données du tableau ci-dessous :

x	1	4	9	16	25
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

Réponse. $y = 0{,}992x - 0{,}909$.

1063. Résoudre le même problème pour $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	—0,71	—0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

Réponse. $y = -0{,}102x^2 + 0{,}200x + 0{,}806$.

1064. Trouver par la méthode des moindres carrés une fonction $S = A \cdot t^q$ pour les données du tableau ci-dessous :

t	1	2	3	4	5
S	7,1	27,8	62,1	110	161

Solution. Formons le tableau suivant :

k	$x_k = \lg t_k$	x_k^2	$y_k = \lg S_k$	x_ky_k
1	0,0000	0,0000	0,8513	0,0000
2	0,3010	0,0906	1,4440	0,4346
3	0,4771	0,2276	1,7931	0,8555
4	0,6021	0,3625	2,0414	1,2291
5	0,6990	0,4886	2,2068	1,5425
Σ	2,0792	1,1693	8,3366	4,0637

Les résultats obtenus dans le tableau nous permettent de former le système

$$\begin{cases} 2{,}0792q + 5 \lg A = 8{,}3366, \\ 1{,}1693q + 2{,}0792 \lg A = 4{,}0637. \end{cases}$$

D'où $q = 1{,}958$, $\lg A = 0{,}8532$, c'est-à-dire $A = 7{,}132$. Il s'ensuit que la fonction puissance cherchée sera $S = 7{,}132t^{1{,}958}$.

1065. Trouver par la méthode des moindres carrés une fonction exponentielle $S = Ae^{ct}$ d'après les données du tableau suivant:

t	0	2	4	6	8	10	12
S	1280	635	324	162	76	43	19

Solution. On forme le tableau ci-dessous:

k	t	t^2	$y = \lg S$	$t \cdot y$
1	0	0	3,1072	0,0000
2	2	4	2,8028	5,6056
3	4	16	2,5105	10,0420
4	6	36	2,2095	13,2570
5	8	64	1,8808	15,0464
6	10	100	1,6335	16,3350
7	12	144	1,2787	15,3444
Σ	42	364	15,4230	75,6304

On obtient le système d'équations:

$$\begin{cases} 42c \cdot \lg e + 7 \lg A = 15{,}4230, \\ 364c \cdot \lg e + 42 \lg A = 75{,}6304, \end{cases}$$

c'est-à-dire $c \cdot \lg e = -0{,}1509$, $\lg A = 3{,}1087$.

Par conséquent, $A = 1284$ et $c = -0{,}347$. Ainsi, la fonction exponentielle cherchée sera $S = 1284e^{-0{,}347t}$.

Dans les problèmes qui suivent, on demande de trouver par la méthode des moindres carrés les fonctions du type donné d'après les valeurs indiquées aux tableaux.

1066. Trouver la fonction linéaire $y = a_0x + a_1$:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

Réponse. $y = -1{,}802x + 2{,}958$.

1067. Trouver la fonction quadratique $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$:

x	7	8	9	10	11	12	13
y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,1	5,9

Réponse. $y = -0{,}145\,x^2 + 3{,}324\,x - 12{,}794$.

1068. Trouver la fonction puissance $S = A \cdot t^q$:

t	1	2	3	4	5
S	7,1	15,2	48,1	96,3	150,1

Réponse. $S = 5{,}7\,t^{1,97}$.

1069. Trouver la fonction exponentielle $S = A \cdot e^{ct}$:

t	2,2	2,7	3,5	4,1
S	67	60	53	50

Réponse. $S = 92\,e^{-0,15\,t}$.

1070. Trouver la fonction exponentielle $S = A \cdot e^{ct}$:

t	1	3	5	7	9	11
S	0,75	1,81	5,34	10,86	24,52	59,00

Réponse. $S = 0{,}49\,e^{0,44\,t}$.

2) Il arrive souvent que la fonction donnée $y = f(x)$ doit être remplacée de la façon la plus convenable sur le segment $[a, b]$ par un polynôme de degré m: $y \approx a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode des moindres carrés implique la recherche des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ par la minimisation de l'intégrale

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]^2\,dx = \int_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)]^2\,dx.$$

En utilisant les conditions de minimisation de cette intégrale, on obtient un système de $m + 1$ équations à $m + 1$ inconnues $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ d'où l'on trouve tous ces coefficients:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)]\cdot x^m\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)]\cdot x^{m-1}\,dx = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\int_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)]\,dx = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

1071. Trouver la meilleure approximation de la fonction $y = \sin\frac{\pi x}{2}$ sur le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ sous forme d'un polynôme du troisième degré.

S o l u t i o n. Pour trouver les coefficients de la fonction $\varphi(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, on forme le système d'équations suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\frac{\pi x}{2}\right) x^3\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\frac{\pi x}{2}\right) x^2\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\frac{\pi x}{2}\right) x\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\frac{\pi x}{2}\right) dx = 0. \end{array}\right.$$

En intégrant, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{7}a_0+\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{5}a_2+\frac{1}{4}a_3=\frac{12}{\pi}-\frac{96}{\pi^4}, \\ \frac{1}{6}a_0+\frac{1}{5}a_1+\frac{1}{4}a_2+\frac{1}{3}a_3=\frac{8}{\pi^2}-\frac{16}{\pi^3}, \\ \frac{1}{5}a_0+\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{2}a_3=\frac{4}{\pi^2}, \\ \frac{1}{4}a_0+\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{2}a_2+a_3=\frac{2}{\pi}. \end{cases}$$

D'où l'on trouve: $a_0 = -0{,}40$, $a_1 = -0{,}42$, $a_2 = 1{,}85$, $a_3 = -0{,}05$. Donc,

$$\varphi(x) = -0{,}4x^3 - 0{,}42x^2 + 1{,}85x - 0{,}05.$$

Vérification. Pour $x=\frac{1}{3}$ $f\left(\frac{1}{3}\right)=0{,}50$, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}51$.

1072. Trouver la meilleure approximation de la fonction $f(x) = \ln(4+x)$, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ sous forme d'un polynôme du second degré.

Réponse. $\varphi(x) = -0{,}2723x^2 + 0{,}5003x + 1{,}3424$.

1073. Trouver la meilleure approximation de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pour $0 < x < 1$ sous forme d'un polynôme du troisième degré.

Réponse. $\varphi(x) = 0{,}670x^3 - 0{,}728x^2 - 0{,}350x + 0{,}943$.

CHAPITRE X

PROGRAMMATION LINÉAIRE

§ 1. Inégalités linéaires et domaine de solutions d'un système d'inégalités linéaires

Soit

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geqslant 0 \tag{1}$$

une inégalité linéaire à deux variables x_1 et x_2. Si les grandeurs x_1 et x_2 sont considérées en tant que coordonnées des points du plan, alors l'ensemble des points du plan dont les coordonnées satisfont à l'inégalité (1) est appelé *domaine de solutions* de l'inégalité donnée. Le domaine de solutions de l'inégalité (1) est représenté par un demi-plan.

Pour déterminer lequel des deux demi-plans correspond à l'inégalité (1), il suffit de mettre cette dernière sous la forme $x_2 \geqslant kx_1 + l$ ou $x_2 \leqslant kx_1 + l$. Dans le premier cas, le demi-plan cherché se situe au-dessus de la droite $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$; dans le second, au-dessous de cette droite. Si $a_2 = 0$, l'inégalité se ramène à la forme $x_1 \geqslant h$ ou $x_1 \leqslant h$, ce qui signifie que le demi-plan se trouve à droite ou à gauche de la droite $x_1 = h$.

Si l'on donne un système d'inégalités

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geqslant 0, \end{array}\right\} \tag{2}$$

où m est un nombre fini, on obtient l'intersection d'un nombre fini de plans qui forme un domaine polygonal D. Ce domaine est appelé *domaine de solutions* du système d'inégalités (2). Il n'est pas obligatoire que le domaine D soit borné; il peut être non borné ou même vide. Ce cas-ci a lieu lorsque le système d'inégalités (2) est contradictoire. Le système peut aussi contenir des inégalités superflues qui n'ont pas de points communs avec le domaine D. Ces inégalités peuvent être éliminées.

Une propriété importante du domaine de solutions consiste dans le fait qu'il est *convexe*, c'est-à-dire qu'il comporte le segment entier qui relie deux de ses points. La droite qui contient au moins un point commun avec le domaine considéré de façon que le domaine entier se situe d'un seul côté de cette droite est appelée droite *d'appui* par rapport à ce domaine.

Une interprétation géométrique analogue peut être donnée à un système d'inégalités contenant trois variables:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + b_m \geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Ici, chacune des inégalités est satisfaite dans l'un des demi-espaces définis par le plan correspondant. Le système d'inégalités (3) représente l'intersection de demi-espaces en définissant de cette façon le domaine polyédral de ses solutions.

1074. Trouver le demi-plan défini par l'inégalité $2x_1 + 3x_2 - 12 \leqslant 0$.

Solution. En remplaçant le signe d'inégalité par le signe d'égalité, on obtient l'équation de la droite $2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$, ou $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$ (fig. 62). Mettons l'inégalité donnée sous la forme $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$. Par conséquent, le demi-plan cherché se situe au-dessous de la droite $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$.

1075. Quel est le demi-plan défini par l'inégalité $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$?

Solution. En substituant au signe d'inégalité le signe d'égalité, on arrive à l'équation de la droite $2x_1 - 3x_2 = 0$ (ou $x_2 = \frac{2}{3}x_1$) qui passe par l'origine des coordonnées. L'inégalité $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$ (ou $x_2 \leqslant \frac{2}{3}x_1$) montre que le demi-plan cherché se trouve au-dessous de la droite $x_2 = \frac{2}{3}x_1$ (fig. 63).

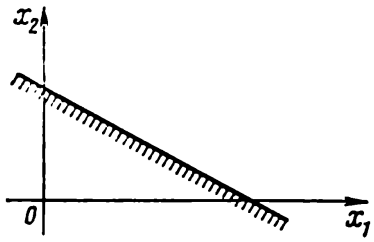

Fig. 62

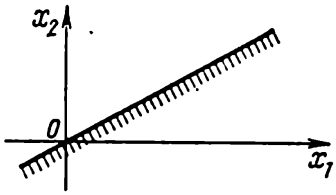

Fig. 63

1076. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités

$$x_1 - 1 \geqslant 0,\ x_2 - 1 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 - 3 \geqslant 0,$$
$$-6x_1 - 7x_2 + 42 \geqslant 0.$$

Solution. En remplaçant les signes d'inégalité par ceux d'égalité, on obtient les équations des quatre droites suivantes: $x_1 - 1 = 0$, $x_2 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 3 = 0$ et $6x_1 + 7x_2 - 42 = 0$ (fig. 64). Mettons les inégalités données sous la forme

$$x_1 \geqslant 1,\quad x_2 \geqslant 1,\quad x_2 \geqslant -x_1 + 3,\quad x_2 \leqslant -\frac{6}{7}x_1 + 6.$$

La hachure indique les demi-plans qui représentent les domaines de solutions des inégalités correspondantes. Le domaine de solutions du système est représenté par un quadrilatère convexe.

1077. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités

$$x_1 \geqslant 0,\quad x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0,\quad x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0,\quad x_1 \leqslant 2.$$

S o l u t i o n. Le remplacement des signes d'inégalité par des signes d'égalité aboutit aux équations des droites $x_1 = 0$, $x_1 +$

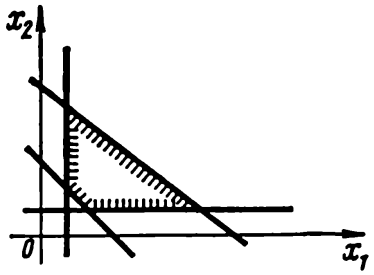

Fig. 64

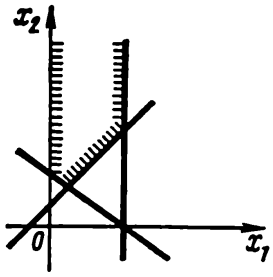

Fig. 65

$+ x_2 - 2 = 0$, $x_1 - x_2 + 1 = 0$, $x_1 = 2$ représentées sur la figure 65. Mettons les inégalités sous la forme

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant -x_1 + 2, \quad x_2 \leqslant x_1 + 1, \quad x_1 \leqslant 2.$$

Le domaine de solutions du système donné est représenté par une figure convexe non bornée.

1078. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités

$$x_1 \geqslant 2, \quad x_1 + 3x_2 \leqslant 3, \quad x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0.$$

S o l u t i o n. On construit les droites correspondantes. La figure 66 montre qu'il n'y a aucun point commun à tous les trois

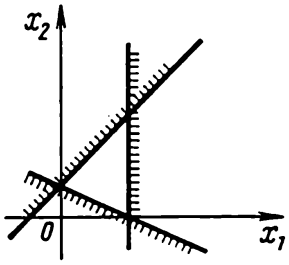

Fig. 66

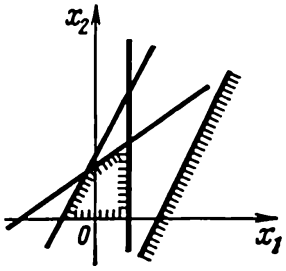

Fig. 67

demi-plans, ce qui signifie que le domaine de solutions est vide et que le système donné est incompatible.

1079. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités

$$2x_1 - x_2 \geqslant -2, \quad x_1 - x_2 \geqslant -2, \quad x_1 \leqslant 1, \quad 2x_1 - x_2 \geqslant 3.$$

S o l u t i o n. Ce système d'inégalités n'a pas de solutions. Au point de vue géométrique, cela veut dire qu'il n'y a pas de point dont les coordonnées vérifient en même temps les inégalités du problème donné (fig. 67).

1080. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ (2) & x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ (3) & 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ (4) & x_1 \leqslant 2, \\ (5) & 3x_1 - x_2 \geqslant -4. \end{array}\right\}$$

S o l u t i o n. Les cinq inégalités du système sont vérifiées par l'ensemble de points du plan contenus par le triangle AOB (fig. 68). Les inégalités (4) et (5) peuvent être éliminées, car l'inégalité (5) définit une droite frontière qui n'a pas de points communs

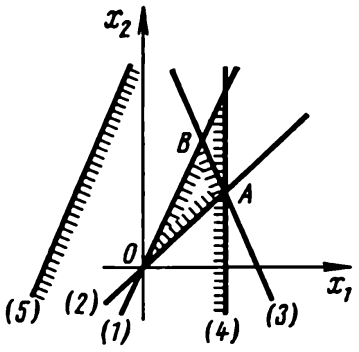

Fig. 68

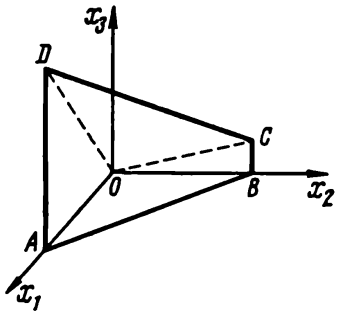

Fig. 69

avec le triangle AOB, alors que la droite définie par l'inégalité (4) n'a qu'un seul point commun avec le triangle susmentionné, étant donc une droite d'appui (cf. paragraphe 2).

1081. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0,$$
$$x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0, \quad 3x_1 + x_2 - 3x_3 \geqslant 0.$$

S o l u t i o n. En remplaçant les signes d'inégalité par des signes d'égalité, on obtient les équations des plans représentés sur la figure 69 : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - 1 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Le domaine de solutions du système donné est constitué par le quadrièdre convexe $ABOCD$.

1082. Où se situe le demi-plan dont les points ont des coordonnées satisfaisant à l'inégalité $x_1 - x_2 - 10 \geqslant 0$?

Réponse. Au-dessous de la droite $x_1 - x_2 - 10 = 0$.

1083. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités $x_1 + x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 - x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 7$.

Réponse. C'est un triangle.

1084. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités $x_1 - 5x_2 + 5 \geqslant 0$, $x_1 + 3x_2 - 3 \leqslant 0$, $x_1 \leqslant 5$.

Réponse. Un domaine non borné.

1085. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités $x_2 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 3$, $x_1 + x_2 \leqslant 0$.

Réponse. Un domaine vide.

1086. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités $x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0$, $2x_1 + x_2 - 7 \geqslant 0$, $x_1 - 2x_2 + 4 \geqslant 0$.

Réponse. Le domaine de solutions est représenté par un point unique (2; 3).

1087. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & x_2 & \geqslant 0, \\ (2) & 4x_1 - x_2 & \geqslant 0, \\ (3) & x_2 & \leqslant 6, \\ (4) & 4x_1 + x_2 & \leqslant 40, \\ (5) & x_1 - x_2 + 8 & \geqslant 0. \end{array}\right\}$$

Réponse. Le domaine de solutions est formé par un trapèze; l'inégalité (5) peut être éliminée.

1088. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leqslant 0$.

Réponse. C'est une pyramide triangulaire.

1089. Trouver le domaine de solutions du système d'inégalités $x_1 \leqslant 4$, $2x_2 - x_3 \geqslant 0$, $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$.

Réponse. C'est un prisme triangulaire.

§ 2. Problème fondamental de la programmation linéaire

Le problème de la programmation linéaire consiste à étudier les méthodes de recherche de la valeur maximale ou minimale d'une fonction linéaire en présence de certaines contraintes linéaires.

La fonction dont on cherche la valeur maximale ou minimale est appelée *fonction objectif*, tandis que l'ensemble de valeurs des variables qui maximisent ou minimisent cette fonction définit l'ainsi appelé *plan (solution) optimal*. Tout autre ensemble de valeurs vérifiant les contraintes imposées constitue un *plan (solution) admissible*.

Admettons que les contraintes soient données sous forme d'un système de m inégalités linéaires à n variables:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m. \end{array}\right\}$$

Parmi les solutions non négatives de ce système on demande de trouver celle qui maximise (minimise) la fonction linéaire (fonction objectif)

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0.$$

Dans ce qui suit on montrera la solution géométrique du problème donné, en se limitant à l'examen d'un système d'inégalités linéaires à deux et à trois variables. Soit en outre donnée une fonction linéaire $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Trouvons dans l'ensemble de points $(x_1; x_2)$ situés dans le domaine de solutions du système d'inégalités compatible ceux qui minimisent (maximisent) la fonction linéaire $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Pour chaque point du plan, la fonction L prend une valeur fixée $L = L_1$. L'ensemble de tous les points de ce genre forme la droite $c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_1$ perpendiculaire au vecteur $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2)$ sortant de l'origine des coordonnées. En translatant notre droite dans le sens positif du vecteur $\mathbf{C}$, on assiste à une augmentation de la fonction linéaire $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$, tandis que la translation dans le sens inverse entraîne la diminution de cette fonction. Admettons maintenant qu'en déplaçant la droite L dans le sens positif du vecteur $\mathbf{C}$, elle rencontre sur son chemin le premier des sommets du polygone de solutions; dans cette position L_1 la droite L devient une droite d'a p p u i et sur cette droite la fonction L prend la valeur minimale. Si l'on continue à déplacer la droite L dans le même sens (sens positif), elle passera par un autre sommet du polygone de solutions en sortant du domaine de solutions et en devenant la droite d'appui L_2 sur laquelle la fonction L atteint son maximum par rapport à toutes les valeurs de L prises dans le polygone de solutions.

De cette façon, la minimisation et la maximisation de la fonction linéaire $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ dans le polygone de solutions sont obtenues aux points d'intersection de ce polygone avec les droites d'appui $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ normales au vecteur $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2)$. La droite d'appui peut rencontrer le polygone de solutions en un point unique (sommet du polygone), ou bien en une infinité de points (côté du polygone).

D'une façon analogue, une fonction linéaire à trois variables $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_0$ prend une valeur constante dans un plan perpendiculaire au vecteur $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2; c_3)$. Les valeurs minimum et maximum de cette fonction dans le polyèdre de solutions sont obtenues aux points de rencontre de ce polyèdre avec les plans d'appui perpendiculaires au vecteur $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2; c_3)$. Le plan d'appui peut rencontrer le polyèdre de solutions en un seul point (sommet du polyèdre), ou en une infinité de points (arête ou face du polyèdre).

1090. Maximiser la forme linéaire $L = 2x_1 + 2x_2$ sous les contraintes $3x_1 - 2x_2 \geqslant -6$, $3x_1 + x_2 \geqslant 3$, $x_1 \leqslant 3$.

S o l u t i o n. En remplaçant les signes d'inégalité par des signes d'égalité exacte, on construit le domaine de solutions d'après

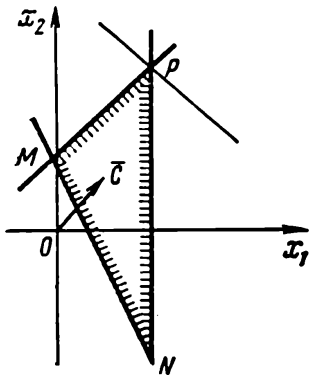

Fig. 70

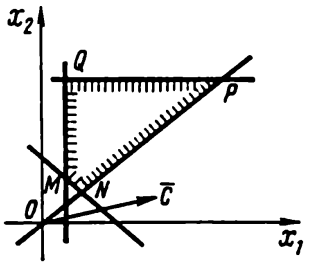

Fig. 71

les équations des droites $3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3 = 0$, $x_1 = 3$ (fig. 70). Le domaine de solutions des inégalités est repré-

senté par le triangle MNP. Construisons maintenant le vecteur **C** (2; 2). Alors la droite d'appui, en sortant du triangle de solutions, passera par le point $P\left(3; \frac{15}{2}\right)$. Donc, au point P la fonction linéaire $L = 2x_1 + 2x_2$ est maximisée: $L_{max} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{15}{2} = 21$.

1091. Minimiser la fonction linéaire $L = 12x_1 + 4x_2$ compte tenu des contraintes $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $x_1 \geqslant \frac{1}{2}$, $x_2 \leqslant 4$, $x_1 - x_2 \leqslant 0$.

Solution. Substituons aux signes d'inégalité des signes d'égalité exacte et construisons le domaine de solutions limité par les droites $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 4$, $x_1 - x_2 = 0$. C'est le polygone de solutions $MNPQ$ (fig. 71). Construisons maintenant le vecteur **C** (12; 4). La droite d'appui passe par le point $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ qui est le premier point en lequel la droite L, qui se déplace dans le sens positif du vecteur **C**, rencontre le polygone de solutions. En ce point, la fonction linéaire $L = 12x_1 + 4x_2$ est minimisée: $L_{min} = 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12$.

1092. Trouver la valeur maximale de la fonction $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$, les contraintes imposées étant les suivantes: $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_1 - x_2 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $3x_1 + x_2 \leqslant 15$.

Solution. Construisons le domaine de solutions du système d'après les équations des plans $x_2 + x_3 = 3$, $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 = 1$,

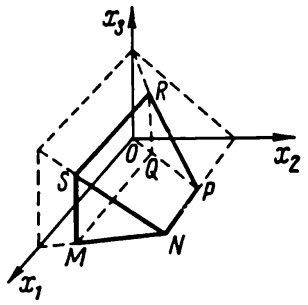

Fig. 72

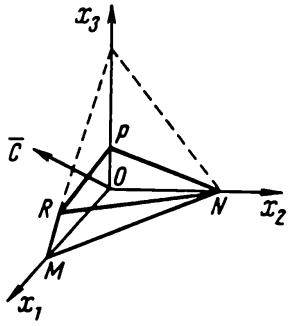

Fig. 73

$3x_1 + x_2 = 15$. Le domaine de solutions est constitué par le polyèdre $MNPQRS$ (fig. 72). Construisons maintenant le vecteur **C** (1; 3; 3). Le plan d'appui passe par le point N (4; 3; 0) par lequel il quitte le polyèdre de solutions en se déplaçant dans le sens positif du vecteur **C**, ce qui signifie qu'en ce point la fonction linéaire $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ prendra sa valeur maximale, donc $L_{max} = 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 13$.

1093. Trouver la valeur maximale de la fonction $L = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ compte tenu des contraintes $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 8$.

Solution. Construisons le domaine de solutions du système d'inégalités linéaires d'après les plans $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Ce domaine se présente sous la forme du polyèdre $MNOPR$ (fig. 73). Construisons le vecteur **C** (3; —6; 2). Si le plan d'appui se déplace dans le sens positif du vecteur **C**, il quitte le polyèdre de solutions par les points de l'arête MR, ce qui veut dire que la valeur maximale de la fonction $L = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ est atteinte sur l'ensemble de points du segment MR. Pour s'en convaincre, il suffit de porter les coordonnées des points M (2; 0; 0) et $R\left(\frac{16}{11}; 0; \frac{9}{11}\right)$ dans la forme linéaire $L = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$:

$$L(M) = 6, \quad L(R) = 6.$$

1094. Trouver la valeur maximale de la fonction $L = x_1 + 3x_2$ sous les contraintes suivantes: $x_1 + 4x_2 \geqslant 4$, $x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_2 \leqslant 2$.

Réponse. $L_{\max} = 10$ pour $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

1095. Minimiser la fonction $L = x_1 - x_2$ sous les contraintes suivantes: $3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 7$, $1 \leqslant x_2 \leqslant 4$, $x_1 \leqslant 4$.

Réponse. $L_{\min} = -4$ pour $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

1096. Trouver la valeur maximale de la fonction $L = 3x_1 - 4x_2$ compte tenu des contraintes suivantes: $x_1 - 2x_2 \geqslant 6$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 6$.

Réponse. $L_{\max} = 18$ pour $x_1 = 6$, $x_2 = 0$.

1097. Maximiser la fonction $L = -x_1 + 2x_2$ sous les contraintes suivantes: $x_1 - 8x_2 \leqslant 10$, $x_1 + x_2 \geqslant 1$, $x_1 - 5x_2 \geqslant -5$, $3x_1 + 10x_2 \leqslant 30$.

Réponse. $L_{\max} = 2$ pour $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

1098. Trouver la valeur maximale de la fonction $L = 8x_1 - 2x_2$ sous les contraintes suivantes: $3x_1 + 4x_2 \geqslant 18$, $3x_1 - x_2 \geqslant 3$, $x_2 \leqslant 6$, $2x_1 + x_2 \leqslant 18$, $4x_1 - x_2 \leqslant 24$.

Réponse. $L_{\max} = 48$ en chaque point du segment AB, où A (6; 0), B (7; 4).

1099. Minimiser la forme linéaire $L = -2x_1 - x_2 + 3x_3$ sous les contraintes suivantes: $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $3x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

Réponse. $L_{\min} = -4$ pour $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

1100. Trouver la valeur maximale de la fonction $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ sous les contraintes suivantes: $x_1 + x_2 \leqslant 3$, $x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 3$.

Réponse. $L_{\max} = 33$ pour $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 9$.

1101. Maximiser la fonction $L = 10x_1 + x_3$ sous les contraintes suivantes: $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6$, $3x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

Réponse. $L_{\max} = 20$ pour $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

§ 3. Méthode du simplexe

1. Notion de méthode du simplexe. La méthode géométrique illustre particulièrement bien la solution du problème fondamental de la programmation linéaire lorsqu'on a affaire à deux ou même à trois variables. Si le nombre de variables augmente, la méthode susmentionnée ne peut plus être appliquée et l'on doit faire appel à des méthodes analytiques l'une desquelles est la *méthode du simplexe*. Lorsqu'on met en œuvre des méthodes de calcul, on donne d'habitude le système de contraintes sous la forme d'un système d'équations linéaires

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (A)$$

parmi les solutions non négatives duquel il faut trouver celles qui maximisent la fonction linéaire

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0.$$

Exprimons $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \leqslant m)$ en utilisant les autres variables

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a'_{1,\ r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1, \\ x_2 = a'_{2,\ r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = a'_{r,\ r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n + b'_r, \end{array}\right\} \qquad (B)$$

où $b'_1 \geqslant 0$, $b'_2 \geqslant 0$, ..., $b'_r \geqslant 0$. Si les contraintes sont exprimées par des inégalités, celles-ci peuvent être transformées en égalités en introduisant des variables nouvelles non négatives appelées variables *d'équilibrage*. Ainsi, par exemple, il suffit d'ajouter au premier membre de l'inégalité $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$ une certaine grandeur $x_{n+1} \geqslant 0$ pour obtenir l'égalité

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b.$$

Les contraintes peuvent aussi être données sous forme mixte, c'est-à-dire par des inégalités et par des équations. Dans ce cas, le procédé qui vient d'être cité nous permet d'obtenir exclusivement des équations. Les variables (inconnues) $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont des variables *de base*, alors que la collection $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ forme la *base*; les autres variables sont des variables *libres* (secondaires). Le système de contraintes (B) est appelé *système réduit à une base unitaire*. En substituant dans la forme linéaire L aux variables de base leurs expressions en fonction des variables libres tirées du système (B), on obtient

$$L = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_nx_n.$$

Maintenant, en égalant à zéro toutes les variables libres, on trouve les valeurs des variables de base:

$$x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2,\ \ldots,\ x_r = b'_r.$$

De cette façon, la solution du système $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$ sera admissible et sera appelée solution *de base*. Pour la solution de base obtenue, la valeur de la forme linéaire sera $L_B = \gamma_0$. La solution du problème par la méthode du simplexe comporte plusieurs étapes (itérations) qui nous permettent de passer d'une base B à une autre B′ de façon que la valeur de L_B diminue ou, pour le moins, n'augmente pas, c'est-à-dire $L_{B'} \leqslant L_B$.

L'idée de la méthode du simplexe sera illustrée ci-après par des exemples numériques.

1102. Maximiser la forme linéaire $L = -x_4 + x_5$ compte tenu des contraintes suivantes: $x_1 + x_4 - 2x_5 = 1$, $x_2 - 2x_4 + x_5 = 2$, $x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$.

Solution. Le système d'équations traduisant les contraintes données est compatible vu que les rangs de la matrice du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et de la matrice complète

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

coïncident et sont égaux à 3. Il s'ensuit que le système d'équations est compatible et que trois variables (de base) peuvent être exprimées linéairement par deux variables libres. Exprimons, par exemple, x_1, x_2, x_3 par x_4 et x_5 et réduisons le système à la base unitaire

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$

Exprimons la forme linéaire $L = -x_4 + x_5$ par les variables libres x_4 et x_5 (dans notre cas, L est déjà exprimée par x_4 et x_5). Maintenant, pour $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, les variables de base prendront les valeurs suivantes: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. De cette façon, la première solution admissible du système d'équations est $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ ou (1, 2, 3, 0, 0). Pour la solution admissible trouvée, la forme linéaire L est nulle, c'est-à-dire $L_1 = 0$.

Essayons maintenant d'augmenter la valeur de L_1 ; si x_4 augmente, L_1 diminue, car x_4 est précédé d'un coefficient négatif, alors que l'augmentation de x_5 entraîne l'accroissement simultané de L_1. Augmentons donc x_5 de façon que x_1, x_2, x_3 ne deviennent pas négatifs, tout en laissant $x_4 = 0$. La deuxième équation du système (C) montre que x_5 peut être augmenté jusqu'à 2. Alors les valeurs des variables seront: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, ou (5, 0, 1, 0, 2).

Pour la solution admissible trouvée, la valeur de la forme linéaire L augmentera et sera $L_2 = 2$.

Ensuite, prenons en qualité de variables libres x_2 et x_4, c'est-à-dire les variables qui dans la nouvelle solution trouvée sont nulles. Dans ce but, en partant de la deuxième équation du système (C),

exprimons x_5 par x_2 et x_4, ce qui donne $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$. Alors

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 &= 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 &= 2 - x_2 + 2x_4, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D)}$$
$$L = 2 - x_2 + x_4.$$

Pour faire accroître la valeur de L, nous allons augmenter x_4. La deuxième équation du système (D) montre que si x_3 reste non négatif, la valeur de x_4 peut atteindre $\frac{1}{5}$. Sous cette condition, la nouvelle solution admissible sera $x_1 = \frac{28}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{1}{5}$, $x_5 = \frac{12}{5}$, ou $\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$. Dans ce cas, la valeur de la forme linéaire sera $L_3 = \frac{11}{5}$. Exprimons maintenant x_1, x_4, x_5 par les variables libres x_2 et x_3:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{28}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_4 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2, \\ x_5 &= \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$
$$L = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_2.$$

Etant donné que dans la dernière forme linéaire les deux variables libres ont des coefficients négatifs, la valeur maximale de L sera atteinte pour $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Cela veut dire que la solution $\frac{28}{5}$, 0, 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{12}{5}$ est optimale et que $L_{\max} = \frac{11}{5}$.

1103. Maximiser la forme linéaire $L = x_2 + x_3$ sous les contraintes $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$.

S o l u t i o n. Le système d'équations traduisant les contraintes données est compatible étant donné que les rangs de la matrice du système d'équations et de la matrice complète coïncident et sont égaux à 2. On peut donc exprimer d'une façon linéaire deux variables de base par l'intermédiaire des deux autres variables libres. Prenons en tant que variables libres x_2 et x_3. Alors

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 - x_3, \\ x_4 &= 2 - x_2 + 2x_3, \end{aligned}\right\}$$
$$L = x_2 + x_3.$$

Si $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$, les variables de base $x_1 = 1$, $x_4 = 2$, et l'on aura la première solution admissible (1, 0, 0, 2) pour laquelle $L_1 = 0$. L'accroissement de L peut être obtenu en augmentant x_3 jusqu'à 1. Ainsi, pour $x_3 = 1$ et $x_2 = 0$, les variables de base seront $x_1 = 0$, $x_4 = 4$. La nouvelle solution admissible sera (0, 0, 1, 4) et $L_2 = 1$. Exprimons maintenant x_3 et x_4 par x_1 et x_2 :

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_1 + x_2, \\ x_4 &= 4 - 2x_1 + x_2, \end{aligned}\right\}$$
$$L = 1 - x_1 + 2x_2.$$

L'augmentation de L peut avoir lieu en augmentant x_2. Le dernier système d'équations montre que l'augmentation de x_2 n'est pas limitée, donc L prendra des valeurs positives de plus en plus grandes, c'est-à-dire $L_{\max} = +\infty$.

Ainsi donc, la forme linéaire L n'est pas limitée supérieurement, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de solution optimale.

1104. On donne le système de contraintes

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \quad x_2 + 2x_4 = 1$$

et la forme linéaire $L = 5x_1 - x_3$. Trouver la solution optimale qui minimise notre forme linéaire.

S o l u t i o n. Ce problème pourrait être ramené à la recherche du maximum de la fonction $L_1 = -L$, c'est-à-dire $L_1 = -5x_1 + x_3$, mais cela n'est pas indispensable. Un raisonnement analogue à celui de l'exemple précédent permet d'éviter la maximisation. Le système d'équations donné est compatible, car les rangs de la matrice du système et de la matrice complète sont égaux entre eux et égaux à 2. On peut donc écrire le système d'équations comme suit :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 &= 1 - 2x_4, \end{aligned}\right\}$$
$$L = 10 - 11x_3 + 15x_4.$$

Ici, les variables de base sont x_1 et x_2, alors que les variables libres sont x_3 et x_4. Pour $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$, la première solution de base sera $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, ou (2, 1, 0, 0) et $L_1 = 10$. La diminution de la forme L est entraînée par l'augmentation de x_3, car le coefficient de x_3 dans la forme L est négatif, mais cette augmentation ne doit pas dépasser 1, la valeur de x_4 restant nulle. Si l'on pose $x_3 = 1$, alors $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ ou (0, 1, 1, 0) qui représente la deuxième solution de base pour laquelle $L_2 = -1$.

Exprimons x_2 et x_3 par les nouvelles variables libres x_1 et x_4 :

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 1 - 2x_4, \\ x_3 &= 1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4, \end{aligned}\right\}$$

$$L = -1 + \frac{11}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4.$$

Maintenant, la diminution de la valeur de la forme L dépend de l'augmentation de x_4 jusqu'à $x_4 = \frac{1}{2}$ (dans ce cas, x_2 est non négatif), tandis que $x_1 = 0$. On obtient ainsi une nouvelle solution admissible $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{7}{4}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, ou $\left(0, 0, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pour laquelle $L = -\frac{7}{4}$. Exprimons x_3 et x_4 par les variables libres x_1 et x_2 :

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{7}{4} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2, \\ x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2, \end{aligned}\right\}$$

$$L = -\frac{7}{4} + \frac{11}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2.$$

Etant donné que la forme L ne peut plus être diminuée à cause des coefficients positifs de x_1 et x_2, la solution admissible $\left(0, 0, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ du problème sera la solution optimale. La valeur minimale de L sera $L = -\frac{7}{4}$.

1105. Maximiser la forme linéaire $L = 2x_1 - x_4$ sous les contraintes :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20, \\ x_2 + 2x_4 &\geqslant 5, \end{aligned}\right\}$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 8.$$

S o l u t i o n. Etant donné que le système de contraintes contient une équation et deux inégalités, on transformera ces dernières en équations en introduisant dans le premier membre de la deuxième contrainte une nouvelle variable non négative x_5 à coefficient négatif et dans le premier membre de la troisième contrainte une nouvelle variable x_6, le coefficient de cette dernière étant positif. On arrive

ainsi au système d'équations suivant:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 &= 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Réduisons le système ainsi obtenu à une base unitaire en choisissant en tant que variables de base x_1, x_2, x_3 (vu que le rang de la matrice du système est égal à 3):

$$x_1 = 15 + 2x_4 - x_5, \quad x_2 = 5 - 2x_4 + x_5, \quad x_3 = 28 - x_6. \qquad (*)$$

La forme linéaire deviendra alors $L = 30 + 3x_4 - 2x_5$. Pour $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, les variables de base seront $x_1 = 15$, $x_2 = 5$, $x_3 = 28$, ce qui représente la première solution admissible (15, 5, 28, 0, 0, 0) pour laquelle $L_1 = 30$. Pour faire accroître la valeur de L, il faut augmenter x_4, car le coefficient de cette variable dans la fonction L est positif. De la deuxième contrainte du système (*) on voit que la valeur maximale donnée à x_4 ne peut pas dépasser $\frac{5}{2}$, donc pour $x_4 = \frac{5}{2}$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, les valeurs des autres variables seront: $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 28$; on obtient ainsi la deuxième solution admissible $\left(20, 0, 28, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$ et la fonction linéaire L prendra la forme $L = \frac{75}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5$, ce qui donne pour la deuxième solution admissible $L_2 = \frac{75}{2}$.

Maintenant, vu que les coefficients des variables de L sont négatifs, on ne peut plus augmenter la valeur de cette fonction. Par conséquent, $L_{\max} = \frac{75}{2} = 37{,}5$.

1106. On dispose de 100 kg de métal qui sert à la fabrication de deux types d'articles: n° 1 et n° 2. La fabrication d'un article n° 1 et d'un article n° 2 prend respectivement 2 et 4 kg de métal. Elaborer le plan de production assurant le revenu maximum si les prix de vente des articles n° 1 et n° 2 sont respectivement fixés à 3 et 2 roubles et sous condition qu'il ne faut pas fabriquer plus de 40 articles n° 1 ni plus de 20 articles n° 2.

Solution. Supposons que l'on fabrique x_1 articles n° 1 et x_2 articles n° 2. Alors les contraintes imposées aux variables x_1 et x_2 seront:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\leqslant 40, \\ x_2 &\leqslant 20, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 100. \end{aligned}\right\}$$

La fonction objectif sera de la forme $L = 3x_1 + 2x_2$. En introduisant les nouvelles variables x_3 et x_4, on aboutit à un système de contraintes

mises sous forme d'équations :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 40, \\ x_2 + x_4 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 &= 50. \end{aligned}\right\}$$

Le rang de la matrice de ce système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 3. Prenons comme variables de base x_1, x_2, x_3 et passons à la base unitaire :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 10 + 2x_4, \\ x_2 &= 20 - x_4, \\ x_3 &= 30 - 2x_4. \end{aligned}\right\}$$

La première solution admissible est obtenue pour $x_4 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$. Ces valeurs des variables donnent $L = 70$. La troisième équation montre qu'en augmentant la valeur de x_4 jusqu'à 15, on arrive à faire croître la fonction objectif. Alors pour $x_4 = 15$, $x_1 = 40$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, on a $L = 130$. La deuxième solution admissible sera (40, 5, 0, 15)

$$x_1 = 40 - x_3, \quad x_2 = 5 + \frac{1}{2}x_3, \quad x_4 = 15 - \frac{1}{2}x_3, \quad L = 130 - 2x_3.$$

Le coefficient de x_3 figurant dans la fonction objectif est négatif, ce qui fait que l'augmentation ultérieure de L soit impossible. Par conséquent, la solution optimale est obtenue pour $x_1 = 40$, $x_2 = 5$: $L_{\max} = 130$.

2. Tableaux du simplexe. Réduisons le système de contraintes à la base unitaire

$$\begin{array}{c} x_1 + \ldots + a_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i + \ldots + a_{i,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + \ldots + a_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{array}$$

et la forme linéaire L à la forme

$$L + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_n x_n = \gamma_0. \qquad (**)$$

Mises sous forme de tableau, ces données peuvent s'écrire comme suit :

Variables de base	Termes constants	x_1	...	x_i	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b_1	1	...	0	...	0	$a_{1,\ r+1}$	...	a_{1j}	...	a_{1n}
....	....	...	...	...	...	...	.....	...	....	...	....
x_i	b_i	0	...	1	...	0	$a_{i,\ r+1}$	...	a_{ij}	...	a_{in}
....	....	...	...	...	...	...	.....	...	....	...	....
x_r	b_r	0	...	0	...	1	$a_{r,\ r+1}$	...	a_{rj}	...	a_{rn}
L	γ_0	0	...	0	...	0	γ_{r+1}	...	γ_j	...	γ_n

L'égalité (**) sera appelée *expression réduite* (aux variables libres) de la fonction L, les coefficients γ_j étant les *estimations* (indices) des variables libres correspondantes x_j.

1) On choisit la colonne résolvante a_p à partir de la condition : l'estimation $\gamma_p < 0$ et au moins un élément $a_{ip} > 0$.

2) On choisit la q-ième ligne résolvante en partant de la condition

$$\frac{b_q}{a_{qp}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ip}}\right\} \quad \text{pour} \quad a_{ip} > 0.$$

3) On recalcule les éléments de la q-ième ligne résolvante d'après la formule

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

4) On calcule les éléments de toutes les autres lignes (pour $k \neq p$) à l'aide de la formule

$$a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk} \cdot a_{ip} \ (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ q-1,\ q+1,\ \ldots,\ r).$$

Il faut en permanence se guider par le théorème fondamental (théorème clé) de la méthode du simplexe qui est formulé ci-dessous sans être démontré.

Théorème. *Si, après l'achèvement d'une itération :*

1) *on trouve ne fût-ce qu'une seule estimation négative et si chaque colonne contenant une pareille estimation comporte ne fût-ce qu'un seul élément positif, c'est-à-dire $\gamma_k > 0$ pour certains k, et $a_{ik} > 0$ pour les mêmes k et pour un certain i, alors la solution peut être améliorée en effectuant l'itération suivante* ;

2) *on trouve ne fût-ce qu'une seule estimation négative dont la colonne ne comporte pas d'éléments positifs, c'est-à-dire*

$$\left.\begin{aligned} \gamma_k &< 0, \\ a_{ik} &< 0, \end{aligned}\right\}$$

pour un certain k et pour tous les i, alors la fonction L n'est pas bornée dans le domaine des solutions admissibles ($L_{\max} \to \infty$);

3) *toutes les estimations sont non négatives, c'est-à-dire $\gamma_k \geqslant 0$ pour tous les k, alors la solution optimale est obtenue.*

1107. Trouver la valeur maximale de la fonction linéaire $L = 7x_1 + 5x_2$ sur l'ensemble de solutions non négatives du système d'équations

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 13, \\ 3x_2 + x_5 &= 15, \\ 3x_1 + x_6 &= 18. \end{aligned}\right\}$$

Solution. Le rang de la matrice du système d'équations donné

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 4. La matrice complète est aussi de rang 4. Par conséquent, quatre variables (de base) peuvent être exprimées par deux variables libres, c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 &= 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 &= 15 - 3x_2, \\ x_6 &= 18 - 3x_1. \end{aligned}\right\}$$

Tableau 1

Variables de base	Termes constants	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	19	2	3	1	0	0	0
x_4	13	2	1	0	1	0	0
x_5	15	0	3	0	0	1	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	0	−7	−5	0	0	0	0

On remarquera que la forme linéaire $L = 7x_1 + 5x_2$ (ou $L - 7x_1 - 5x_2 = 0$) est déjà exprimée par les mêmes variables libres. On remplit le tableau de départ (tableau 1).

Voyons si la dernière ligne contient des estimations négatives. On y en trouve deux : —7 et —5. On prend, par exemple, l'estimation —5 et, en examinant la colonne x_2, on constate qu'elle contient trois éléments positifs : 3, 1, 3. Divisons par ces nombres les termes constants correspondants : $\frac{19}{3}$, $\frac{13}{1}$, $\frac{15}{3}$. Le moindre des quotients ainsi obtenus est $\frac{15}{3}$. Cela signifie que l'élément 3, qui se trouve à l'intersection de la ligne x_5 et de la colonne x_2, est l'élément résolvant. Encadrons la ligne et la colonne susmentionnées. La nouvelle base sera constituée par x_3, x_4, x_2, x_6. Pour composer le tableau suivant, il y a lieu de multiplier par $\frac{1}{3}$ la ligne encadrée du tableau 1, afin d'obtenir 1 à la place de l'élément résolvant, et substituons à l'ancienne la nouvelle ligne ainsi formée. Ajoutons à chacune des lignes restantes la ligne nouvellement obtenue multipliée par un nombre tel que les cases de la colonne x_2 contiennent toutes des zéros et écrivons à la place des anciennes lignes les lignes transformées de cette façon. Ainsi prend fin la Ière itération.

Tableau 2

Variables de base	Termes constants	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	4	2	0	1	0	—1	0
x_4	8	2	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0
x_2	5	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	25	—7	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0

Les raisonnements qui viennent d'être exposés sont répétés en les appliquant cette fois-ci au tableau 2, ce qui constitue la IIe itération. Le nouvel élément résolvant se trouve à l'intersection de la

Tableau 3

Variables de base	Termes constants	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
x_4	4	0	0	-1	1	$\frac{2}{3}$	0
x_2	5	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
x_6	12	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1
L	39	0	0	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{11}{6}$	0

Tableau 4

Variables de base	Termes constants	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0
x_5	6	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0
x_2	3	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_6	3	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{4}$	0	1
L	50	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	0

ligne x_3 et de la colonne x_1 et est égal à 2. On remplit le tableau suivant.

On répète la même chose pour le tableau 3 dans lequel l'élément résolvant $\frac{2}{3}$ se trouve à l'intersection de la ligne x_4 et de la colonne x_5. On passe au tableau 4. Etant donné que la dernière ligne de ce tableau ne contient pas d'estimations négatives, le plan optimal (5, 3, 0, 0, 6, 3) est obtenu et la valeur maximale de la forme linéaire L sera $L_{\max} = 50$.

Trouver les solutions optimales non négatives qui minimisent la forme linéaire :

1108.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3, \end{aligned}\right\}$$
$$L = x_1 - x_3.$$

Réponse. (0, 1, 3, 0) ; $L = -3$.

1109.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_2 &= 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_5 &= 5 - x_3 + x_4, \end{aligned}\right\}$$
$$L = x_1 + x_2.$$

Réponse. $\left(\frac{3}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$; $L = \frac{3}{2}$.

1110.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2, \\ x_3 - x_4 &= 1, \end{aligned}\right\}$$
$$L = 2x_3 - x_2.$$

Réponse. (0, 3, 1, 0), $L = -1$.

1111.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 + 6x_6 &= 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 &= 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 &= 6, \end{aligned}\right\}$$
$$L = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6.$$

Réponse. $\left(0, 5, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$; $L = -5$.

1112.

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 &= 900, \end{aligned}\right\}$$
$$L = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3.$$

Réponse. $L = 340$.

Trouver les solutions optimales non négatives qui maximisent la forme linéaire :

1113.

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+5x_3&=20,\\ x_2+2x_4&\geqslant 5,\\ x_1+x_2-\ x_3&\geqslant 8,\end{aligned}\right\}$$
$$L=2x_1+x_4.$$

Réponse. $L=\infty$.

1114.

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3&\geqslant -1,\\ 2x_1-\ x_2-\ x_3&\leqslant -1,\end{aligned}\right\}$$
$$L=-x_1-2x_2-3x_3.$$

Réponse. $\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$, $L=-\frac{11}{5}$.

1115. La capacité d'un atelier de montage assure la production en 24 h de 120 articles de type A et de 360 articles de type B. En 24 h, le service de contrôle technique ne peut contrôler que 200 articles indifféremment de leur type. Les articles de type A sont quatre fois plus chers que ceux de type B. On demande de planifier la production de façon que le revenu de l'entreprise soit maximum.

Réponse. (80, 120) ; $L_{\max}=440$.

1116. Le dépôt d'une entreprise ne peut délivrer que 80 kg de métal pour la production d'articles n° 1 et n° 2. La production d'un seul article n° 1 nécessite 2 kg de métal, alors qu'un article n° 2 n'en prend que 1 kg. On demande de planifier la production de façon à assurer à l'entreprise le revenu maximal si le nombre d'articles n° 1 et n° 2 produits ne doit pas dépasser respectivement 30 et 40 pcs, leurs prix étant respectivement de 5 et 3 roubles.

Réponse. (20, 40) ; $L_{\max}=220$.

1117. Pour faire engraisser les animaux, on utilise deux types de mangeailles n° 1 et n° 2 dont les prix sont respectivement de 5 et 2 kopecks. Chaque kilo de mangeaille n° 1 contient 5 unités de substance nutritive A, 2,5 unités de substance nutritive B et 1 unité de substance nutritive C, pour la mangeaille n° 2 ces données étant respectivement égales à 3, 3 et 1,3. Quelle quantité de mangeaille de chaque type doit-on consommer chaque jour de façon que les frais soient minimaux si l'on sait que la ration doit inclure au moins 225 unités de substance nutritive A, au moins 150 unités de substance nutritive B et au moins 80 unités de substance nutritive C?

Réponse. 15 kg de mangeaille n° 1 et 50 kg de mangeaille n° 2.

3. Notion de solution dégénérée. Lors de l'étude de la méthode du simplexe, on supposait que $b_i>0$ (voir page 414) aussi bien dans le système de départ que dans les systèmes obtenus à la suite de chaque itération. Si dans certaines équations les termes constants $b_i=0$, alors dans la solution de base correspondant à

ce système les variables de base, par rapport auxquelles les équations données sont résolues, deviennent nulles. La solution de base qui comporte ne fût-ce qu'une seule variable de base nulle est appelée *solution dégénérée* et l'on appelle également *problème dégénéré* le problème de programmation linéaire qui admet ne fût-ce qu'une seule solution dégénérée. En effectuant, dans ce cas, les itérations successives, on peut retrouver le même jeu de variables de base et de variables libres, ce qui traduit le *bouclage* du schéma de calcul. Ci-dessous on trouvera la règle qui permet de lever le bouclage (les bases théoriques sur lesquelles repose cette règle ne sont pas données, car elle constitue un problème à part appelé problème de dégénération).

Règle. *Si à une certaine étape de calcul on rencontre une indétermination dans le choix de la ligne résolvante, c'est-à-dire si l'on se trouve en présence de plusieurs rapports minimaux* $\frac{b_i}{a_{ip}}$, *il faut choisir la ligne pour laquelle le rapport des éléments de la colonne suivante aux éléments correspondants de la colonne résolvante sera minimal. Si, dans ce cas aussi, les rapports minimaux sont à nouveau égaux, on forme les rapports des éléments de la colonne suivante et ainsi de suite jusqu'à la détermination univoque de la ligne résolvante.*

1118. Maximiser la forme linéaire $L = 4x_5 + 2x_6$ sous les contraintes: $x_1 + x_5 + x_6 = 12$, $x_2 + 5x_5 - x_6 = 30$, $x_3 + x_5 - 2x_6 = 6$, $2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

Solution. Le système de départ a comme solution admissible (12, 30, 6, 9, 0, 0) et $L = 0$. Ci-après sont données les itérations successives de la méthode du simplexe:

Tableau de départ

x_i	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5 (4)	x_6 (2)	b_i/a_{ip}	a_{i_1}/a_{ip}
x_1	12	1				1	1	12	
x_2	30		1			5	—1	6	$-\frac{1}{5}$
x_3	6			1		1	—2	6	—2
x_4	18				2	3	—2	6	$-\frac{2}{3}$
L	0					—4	—2		

Ière itération

x_1	6	1		-1			3	2	
x_2	0		1	-5			9	0	$-\frac{5}{9}$
x_5	6			1		1	-2		
x_4	0			-3	2		4	0	$-\frac{3}{4}$
L	24			4			-10		

La Ière itération aboutit à un système résolu par rapport aux variables de base x_1, x_2, x_4, x_5 qui a comme solution admissible (6, 0, 0, 0, 6, 0) pour laquelle $L_1 = 24$. La IIe et la IIIe itération ne changent pas la solution admissible ni la valeur de la forme linéaire ($L_2 = L_3 = 24$) et ce n'est que la IVe itération qui donne la solution optimale (0, 0, 9, 7/2, 7,5) pour laquelle $L_{max} = 38$. Dans le cas étudié, il n'y a pas de bouclage, quoique trois itérations

IIe itération

x_1	6	1		$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$			$\frac{24}{5}$
x_2	0		1	$\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{2}$			0
x_5	6			$-\frac{1}{2}$	1	1		
x_6	0			$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$			
L	24			$-\frac{7}{2}$	5			

IIIe itération

x_1	6	1	$-\frac{5}{7}$		$\frac{12}{7}$			
x_3	0		$\frac{4}{7}$	1	$-\frac{18}{7}$			
x_5	6		$\frac{2}{7}$		$-\frac{2}{7}$		1	
x_6	0		$\frac{3}{7}$		$-\frac{10}{7}$			1
L	24		2		-4			

IVe itération

x_4	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{5}{12}$		1				
x_3	9	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1					
x_5	7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$			1			
x_6	5	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$				1		
L	38	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$						

successives ne marquent aucun progrès ne faisant que changer les variables de base et les variables libres. Dans le tableau de départ, on remarque trois rapports minimaux égaux entre eux : $\frac{b_2}{a_{25}} = \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{b_4}{a_{45}} = 6$. Alors, pour éviter un bouclage éventuel, on fait appel à la règle énoncée plus haut et l'on forme les rapports suivants :

$$\frac{a_{26}}{a_{25}} = -\frac{1}{5}, \quad \frac{a_{36}}{a_{35}} = -2, \quad \frac{a_{46}}{a_{45}} = -\frac{2}{3}.$$

Le moindre de ces rapports est $\frac{a_{36}}{a_{35}} = -2$. Par conséquent, la troisième ligne doit être considérée en tant que ligne résolvante et ainsi de suite (voir les tableaux).

1119. Maximiser la forme linéaire $L = 2x_1 + 4x_2$ sous les contraintes suivantes: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $-x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 9$, $-x_1 + 5x_2 + x_5 = 30$, $-x_1 + x_2 + x_6 = 12$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

Réponse. (5, 7, 9, 7/2, 0, 0); $L_{\max} = 38$.

§ 4. Problèmes duaux

A chaque problème de programmation linéaire on peut mettre en correspondance un autre problème lié d'une façon bien déterminée au premier et appelé problème dual.

Ainsi, lorsque le problème initial ou primal (problème I) de programmation linéaire consiste à m i n i m i s e r une fonction linéaire $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ sous les contraintes suivantes données sous forme d'inégalités

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{array}\right\}$$

et à condition que x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) ne soit pas négatif, à ce problème on peut lier un autre (problème I') appelé problème dual par rapport au problème primal (I) et qui consiste à m a x i m i s e r une fonction linéaire $T = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$ sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leqslant c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leqslant c_n \end{array}\right\},$$

$y_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) devant être non négatif.

On remarque que la matrice constituée par les coefficients des variables du problème primal I

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

de même que la matrice analogue dans le problème dual I'

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sont obtenues l'une de l'autre par une simple transposition. Les deuxièmes membres des inégalités formant le système de contraintes de l'un de ces problèmes sont constitués par les coefficients de la fonction linéaire prise de l'autre pro-

blème. Le sens des inégalités du système de contraintes du problème I (minimisation) est « $\geqslant$ » tandis que dans le système de contraintes du problème I' (maximisation) toutes les inégalités sont de sens « $\leqslant$ ». Il faut dire que la notion de dualité est réciproque, ce qui signifie que si l'on met le problème I' sous une forme analogue au problème I, alors le problème primal I sera un problème dual par rapport au problème I'. C'est pourquoi les problèmes I et I' sont appelés problèmes *biduaux* ou *biconjugués*. On montre que $L_{\min} = T_{\max}$. On montre également que la condition nécessaire et suffisante pour que la solution de n'importe quel couple de problèmes duaux soit optimale consiste dans l'égalité $L(\bar{x}) = T(\bar{y})$, où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les solutions admissibles des problèmes I et I'.

1120. Le problème primal (I) est formulé comme suit : trouver les valeurs non négatives (x_1, x_2) sous conditions

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geqslant 4, \\ x_1 - x_2 &\geqslant -1 \end{aligned}\right\}$$

et de façon que la fonction linéaire $L = 3x_1 + 2x_2$ soit minimisée.

Le problème dual (I') : trouver les valeurs non négatives (y_1, y_2) sous les conditions

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 &\leqslant 3, \\ 2y_1 - y_2 &\leqslant 2 \end{aligned}\right\}$$

et de façon que la fonction linéaire $T = 4y_1 - y_2$ soit maximisée.

Solution. Donnons la solution géométrique de ces problèmes. Construisons le système de contraintes des problèmes I et I'. Au

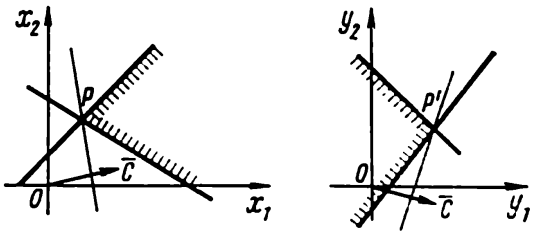

Fig. 74

point $P\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ la fonction linéaire L présente son minimum, c'est-à-dire $L_{\min} = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{16}{3}$, alors qu'au point $P'\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ c'est la fonction linéaire T qui a son maximum, c'est-à-dire $T_{\max} = 4 \cdot \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ (fig. 74).

1121. Le problème primal (I) est formulé comme suit : trouver les valeurs non négatives (x_1, x_2) qui minimisent la fonction li-

néaire $L = 3x_1 + 2x_2$ sous les contraintes

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\geqslant 14, \\ 4x_1 + 5x_2 &\geqslant 20. \end{aligned}\right\}$$

Formuler le problème dual et le résoudre.

Réponse. $L_{\min} = \frac{86}{9}$; $\left(\frac{10}{9}, \frac{28}{9}\right)$; $T_{\max} = \frac{86}{9}$; $\left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right)$.

1122. Le problème primal (I) est formulé comme suit : trouver les valeurs non négatives (x_1, x_2) qui maximisent la fonction linéaire $L = 5x_1 + 4x_2$ sous les contraintes

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leqslant 24, \\ 3x_1 + 4x_2 &\leqslant 24. \end{aligned}\right\}$$

Formuler et résoudre le problème dual.

Réponse. $L_{\max} = \frac{216}{7}$; $\left(\frac{24}{7}, \frac{24}{7}\right)$; $T_{\min} = \frac{216}{7}$; $\left(\frac{8}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

1123. Le problème primal (I) se formule comme suit : trouver les valeurs non négatives (x_1, x_2) qui minimisent la fonction linéaire $L = 3x_1 + 3x_2$ sous les contraintes

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 &\geqslant -2, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 6. \end{aligned}\right\}$$

Formuler et résoudre le problème dual.

Réponse. $L_{\min} = \frac{78}{7}$; $\left(\frac{10}{7}, \frac{16}{7}\right)$; $T_{\max} = \frac{78}{7}$; $\left(\frac{27}{14}, \frac{3}{14}\right)$.

§ 5. Problème de transport

Un problème typique de programmation linéaire est constitué par l'ainsi appelé *problème de transport* qui se pose lorsqu'il faut planifier l'organisation la plus rationnelle des transports des charges. Dans certains cas, il s'agit d'élaborer un plan tel que le coût de transport soit minimal, tandis que dans d'autres cas on s'intéresse à une livraison aussi rapide que possible. Le premier problème est dit *problème de transport à minimum de frais*, le deuxième, *problème de transport à minimum de temps*.

Le premier problème représente un cas particulier du problème de programmation linéaire et peut être résolu par la méthode du simplexe, mais d'une façon plus simple grâce à certaines particularités qu'il présente.

Supposons qu'en p points d'expédition il y ait respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_p$ unités de charge homogène qu'il faut livrer à q utilisateurs chacun d'eux devant recevoir respectivement $b_1, b_2, \ldots, b_q$ unités. On connaît les frais c_{ik} qu'il faut engager pour transporter une charge unitaire du i-ième point d'expédition au k-ième utilisateur. Désignons par $x_{ik} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, q)$ le nombre d'unités de charge transportées à partir du i-ième dépôt au k-ième utilisateur. Alors les variables x_{ik} doivent satisfaire aux con-

traintes suivantes:

1) $\sum_{k=1}^{q} x_{ik} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$;

2) $\sum_{i=1}^{p} x_{ik} = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$;

3) $x_{ik} \geqslant 0$.

Les frais de transport totaux font $L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{pq}x_{pq}$. Par conséquent, on demande de trouver pq variables x_{ik} vérifiant les conditions imposées et minimisant la fonction objectif L.

La résolution d'un problème de ce type comporte deux étapes:

1) détermination de la solution de base initiale;

2) construction des itérations successives dans le but d'arriver à la solution optimale.

1. Détermination de la solution de base initiale. Supposons que l'on possède le tableau des données initiales du problème. La solution de base initiale sera construite d'après l'ainsi appelée règle du « coin Nord-West ».

b_k / a_i	b_1	b_2	$\ldots$	b_k	$\ldots$	b_q
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\ldots$	c_{1k} x_{1k}	$\ldots$	c_{1q} x_{1q}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\ldots$	c_{2k} x_{2k}	$\ldots$	c_{2q} x_{2q}
$\vdots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\ldots$	c_{ik} x_{ik}	$\ldots$	c_{iq} x_{iq}
$\vdots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$
a_p	c_{p1} x_{p1}	c_{p2} x_{p2}	$\ldots$	c_{pk} x_{pk}	$\ldots$	c_{pq} x_{pq}

Remplissons le tableau en question en partant du coin situé en haut à gauche, le déplacement étant dirigé soit à droite suivant la ligne, soit vers le bas suivant la colonne. Portons dans la case (1, 1) le moindre des nombres a_1 et b_1, c'est-à-dire

$$x_{11} = \min \{a_1, b_1\}.$$

Si $a_1 > b_1$, alors $x_{11} = b_1$ et la première colonne est « fermée », ce qui signifie que la demande du premier utilisateur est complètement satisfaite. On continue à se déplacer suivant la première ligne en écrivant dans la case voisine (1, 2) le moindre des nombres $a_1 - b_1$ et b_2, c'est-à-dire

$$x_{12} = \min \{a_1 - b_1, b_2\}.$$

Mais si $b_2 > a_1$, la première ligne « se ferme » d'une façon analogue et l'on remplit la case voisine (2, 1) où l'on porte

$$x_{21} = \min \{a_2, b_1 - a_1\}.$$

Le processus qui vient d'être exposé doit être continué jusqu'au moment où, à une certaine étape, on arrive à l'épuisement des ressources a_p et à la satisfaction de la demande b_q.

1124. En deux points d'expédition A et B sont stockées respectivement 150 et 90 t de combustible. Les utilisateurs n°s 1, 2 et 3 ont besoin respectivement de 60, 70 et 110 t. Les coûts de transport d'une tonne de combustible du point A aux consommateurs n^{os}1, 2 et 3 sont respectivement de 6, 10 et 4 roubles, alors que pour le combustible expédié du point B ces coûts sont de 12, 2 et 8 roubles. Elaborer le plan optimal de transport du combustible de façon que les frais engagés soient minimaux.

S o l u t i o n. Portons les données initiales dans le tableau 1, en commençant par la case (1, 1): $x_{11} = \min \{150, 60\} = 60$, et la première colonne est fermée. On passe à la case (1, 2): $x_{12} = \min \{150 - 60, 70\} = 70$, et la deuxième colonne se ferme. Pour la case (1, 3), on a: $x_{13} = \min \{150 - 60 - 70, 110\} = 20$.

Tableau 1

	a_i \ b_k	n° 1: 60	n° 2: 70	n° 3: 110
A	150	60 / 6	70 / 10	20 / 4
B	90	12	2	90 / 8

Etant donné que dans la troisième colonne on a un reste égal à 90, on passe à la case (2, 3) dans laquelle on porte $x_{23} = \min\{90, 90\} = 90$. Vu que les restes suivant la ligne et la colonne sont nuls, la solution de base de départ est obtenue. Les frais correspondant à ce plan sont

$$L = 6 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 90 = 1860 \text{ roubles.}$$

La règle du « coin Nord-West » ne tient pas compte de l'importance des frais c_{ik} et, de ce fait, il n'est pas rare que la solution de base de départ n'ait rien à voir avec la solution optimale. On utilise également la méthode de « l'élément minimal » qui prend en considération la valeur de c_{ik}. Dans ce cas, l'élaboration de la solution de base de départ est commencée à partir de la case qui contient l'élément c_{ik} minimal. Pour l'exemple considéré, c'est la case (2, 2) où $c_{22} = 2$. On porte dans cette case $x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{90, 70\} = 70$ (voir tableau 2).

Tableau 2

	a_i \ b_k	n° 1 60	n° 2 70	n° 3 110	Reste
A	150	60 (6)	(10)	90 (4)	60,0
B	90	(12)	70 (2)	20 (8)	20,0
	Reste	0	0	20,0	

Les restes suivant la ligne et la colonne sont portés dans les cases correspondantes de la ligne et de la colonne des restes. La colonne b_2 est fermée. On passe maintenant à la case (1, 3) vu que $c_{13} = 4$ suit immédiatement en ordre de grandeur après $c_{22} = 2$. On porte dans la case (1, 3) $x_{13} = \min\{a_1 - b_1, b_3\} = \min\{150 - 60, 110\} = 90$. Ensuite, on passe à la case (1, 1) : $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{150, 60\} = 60$. Finalement, on remplit la case (2, 3) : $x_{23} = \min\{a_2 - b_2, b_3\} = \min\{90 - 70, 110\} = 20$.

Cette méthode nous fournit une autre solution de base de départ

$$L = 6 \cdot 60 + 4 \cdot 90 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 20 = 1020 \text{ roubles.}$$

On voit que, dans ce cas-ci, les frais de transport sont moindres, ce qui signifie que l'on s'est approché du plan optimal.

2. Construction des itérations successives. Ayant obtenu la solution de base de départ, on commence à élaborer de nouvelles solutions de base, l'une meilleure que l'autre, en appliquant la méthode des potentiels.

Après avoir élaboré la solution de base de départ, on a toutes les variables groupées en deux catégories: variables de base x_{kl} et variables libres (secondaires) x_{pq}. En utilisant les variables libres, on peut exprimer les fonctions linéaires donnant les coûts de transport de la façon suivante

$$L = \sum_{p,\,q} \gamma_{pq} x_{pq} + \gamma_0. \qquad (*)$$

Pour trouver les coefficients γ_{pq} des variables libres, à chaque point d'expédition A_i on met en correspondance une certaine grandeur u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) que l'on appellera *potentiel* du point A_i. D'une façon analogue, à chaque utilisateur B_j on met en correspondance une certaine grandeur v_j qui sera le potentiel de cet utilisateur.

Relions ces grandeurs par la relation

$$u_k + v_l = c_{kl},$$

où c_{kl} représente le coût de transport d'une tonne de charge livrée du point A_k à l'utilisateur B_l. On montre que l'ensemble des équations $u_k + v_l = c_{kl}$ formées pour toutes les variables de base constitue un système compatible d'équations linéaires; en donnant arbitrairement la valeur de l'une des variables, les valeurs des variables restantes seront trouvées d'une façon univoque à partir de notre système. Pour les variables libres, désignons la somme des potentiels correspondants par c'_{pq}, c'est-à-dire $u_p + v_q = c'_{pq}$ et appelons-la *coût indirect* pour le distinguer du coût donné c_{pq}. Alors les coefficients des variables libres dans l'égalité (*) seront

$$\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}.$$

Si toutes les grandeurs γ_{pq} sont non négatives, la solution de départ sera optimale. Mais si parmi ces grandeurs il y en a qui sont négatives, on passe à la base suivante en augmentant le membre à coefficient négatif et en laissant les autres variables égales à zéro.

Mettons en œuvre les notions qui viennent d'être exposées pour continuer la résolution du problème 1124. A l'aide de la méthode de « l'élément minimal » on a obtenu la solution de base de départ suivante :

$$x_{11} = 60, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = 90, \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = 70,$$
$$x_{23} = 20, \quad L = 1020.$$

Pour trouver les potentiels, il faut résoudre le système

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= c_{11} = 6, \\ u_1 + v_3 &= c_{13} = 4, \\ u_2 + v_2 &= c_{22} = 2, \\ u_2 + v_3 &= c_{23} = 8. \end{aligned}\right\}$$

Donnons arbitrairement la valeur de l'une des inconnues, par exemple, $u_1 = 1$. Alors on a $v_1 = 5$, $v_2 = -3$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$. On calcule ensuite les coûts indirects c'_{pq}:

$$c'_{12} = u_1 + v_2 = -2,$$
$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 10.$$

Calculons maintenant les différences $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{12} = c_{12} - c'_{12} = 10 - (-2) = 12,$$
$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2.$$

Il s'ensuit que l'expression de L en fonction des variables libres prend la forme

$$L = 1020 + 12x_{12} + 2x_{21}.$$

On voit que les coefficients des variables dans le deuxième membre sont tous positifs, donc, la solution de base de départ est optimale.

De cette façon, la méthode de « l'élément minimal » donne directement la solution optimale.

Résolvons maintenant le même problème dans le cas où la solution de départ est obtenue à l'aide de la règle du « coin Nord-West », c'est-à-dire lorsque $x_{11} = 60$, $x_{12} = 70$, $x_{13} = 20$, $x_{23} = 90$, $L = 1860$.

Pour trouver les potentiels, il faut résoudre le système

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= c_{11} = 6, \\ u_1 + v_2 &= c_{12} = 10, \\ u_1 + v_3 &= c_{13} = 4, \\ u_2 + v_3 &= c_{23} = 8. \end{aligned}\right\}$$

En posant $u_1 = 1$, on obtient $v_1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$.

On calcule les coûts indirects c'_{pq}:

$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 10,$$
$$c'_{22} = u_2 + v_2 = 14.$$

Calculons maintenant les différences $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2,$$
$$\gamma_{22} = c_{22} - c'_{22} = 2 - 14 = -12.$$

Exprimé par les variables libres, L prend la forme

$$L = 1860 + 2x_{21} - 12x_{22}.$$

On voit que dans le deuxième membre le coefficient de la variable x_{22} est négatif et, par conséquent, on peut tâcher de diminuer L en augmentant x_{22} et en conservant la valeur nulle de x_{21}. Posons $x_{22} = \lambda$. Etant donné que les sommes des valeurs des inconnues prises

BeatriceGloria_personal library

suivant les lignes et les colonnes doivent rester inchangées, il y a lieu d'effectuer le calcul de bilan suivant :

60	$70-\lambda$	$20+\lambda$
	λ	$90-\lambda$

L'addition de λ à x_{22} est compensée par la soustraction de la même quantité de x_{12}, cette dernière opération étant compensée à son tour par l'addition de λ à x_{13} et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on retourne à x_{22}. En parcourant les cases suivant la ligne brisée en pointillé en un sommet de laquelle on trouve la variable libre x_{22}, tandis que les autres sommets sont occupés par des variables de base (il n'est pas obligatoire que toutes celles-ci y figurent), on obtient l'ainsi appelé *cycle de recalcul* (la ligne brisée est appelée *cycle*) correspondant à la case libre x_{22}. Le tableau montre que la valeur de λ peut être portée à 70, sans que les variables deviennent négatives. On obtient alors la deuxième solution de base :

60	0	90
0	70	20

c'est-à-dire $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 90$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 20$.

Pour cette solution, la valeur de la fonction L est $L = 1860 - 12 \cdot 70 = 1020$. La solution obtenue est donc optimale si l'on prend en considération la solution précédente.

Ainsi, la méthode des potentiels est réalisée comme suit.

1. On trouve les potentiels u_k et v_l de tous les points d'expédition A_k et de tous les consommateurs B_l.
2. On choisit une variable libre pour laquelle la somme des potentiels est strictement supérieure au coût correspondant, ce qui correspond à l'élément à coefficient négatif de la variable libre dans le deuxième membre de la fonction L.
3. Pour la variable choisie au point 2, on trouve le cycle de recalcul correspondant et l'on effectue le déplacement qui s'impose suivant ce cycle. Ce déplacement aboutit à une nouvelle solution admissible.
4. Les opérations exposées aux points 1 à 3 sont répétées jusqu'à l'obtention de la base optimale, c'est-à-dire de la non-négativité des coefficients des variables libres dans le deuxième membre de la fonction linéaire L.

1125. Dans chacun de deux dépôts A et B sont entreposées 90 t de combustible. Le transport d'une tonne de combustible du dépôt A aux points n°s 1, 2, 3 coûte respectivement 1, 3, 5 roubles, alors que la même opération effectuée à partir du dépôt B nécessite 2, 5

et 4 roubles. En chaque point de consommation il faut livrer la même quantité de combustible. Elaborer le plan de transport de combustible de façon que les frais engagés soient minimaux.

Réponse. $L_{\min} = 510$, $x_{11} = 30$, $x_{12} = 60$, $x_{21} = 30$, $x_{23} = 60$.

1126. Trois stations ferrovières A, B et C ont en réserve respectivement 60, 80 et 100 wagons. Elaborer le plan optimal de conduite de ces wagons à quatre points de chargement de céréales si le point n° 1 a besoin de 40 unités, le point n° 2, de 60 unités, le point n° 3, de 80 unités et le point n° 4, de 60 unités. Le coût de la conduite d'un wagon de la station A aux quatre points susmentionnés constitue respectivement 1, 2, 3 et 4 roubles; de la station B, 4, 3, 2 et 0 roubles; de la station C, 0, 2, 2 et 1 rouble.

Réponse. $L_{\min} = 280$ roubles. Pour le plan optimal: $x_{12} = x_{24} = x_{33} = 60$, $x_{23} = 20$, $x_{31} = 40$.

1127. Une usine dispose de trois ateliers A, B, C et de quatre dépôts n°s 1, 2, 3, 4. L'atelier A produit 30 000 pièces d'un certain article, l'atelier B en produit 40 000 pièces, tandis que l'atelier C n'en produit que 20 000 pièces. Pour le même laps de temps, le débit des dépôts n°s 1, 2, 3, 4 est respectivement de 20 000, 30 000, 30 000, 10 000 pièces. Le coût de transport de mille pièces de l'atelier A aux dépôts n°s 1, 2, 3, 4 fait respectivement 2, 3, 2, 4 roubles; de l'atelier B, 3, 2, 5, 1 roubles; de l'atelier C, 4, 3, 2, 6 roubles. Elaborer un plan de transport tel que le coût de transport de 90 000 pièces soit minimal.

Réponse. $L_{\min} = 395$ roubles. Pour le plan optimal: $x_{11} = 25$, $x_{13} = x_{32} = 20$, $x_{12} = x_{21} = 5$, $x_{23} = 35$.

1128. Dans trois dépôts A, B, C sont stockées respectivement 10, 15, 25 t de céréales qui doivent être transportées en quatre points: 5 t au point n° 1, 10 t au point n° 2, 20 t au point n° 3, 15 t au point n° 4. Le coût de transport d'une tonne de céréales du dépôt A aux points n°s 1, 2, 3, 4 constitue respectivement 8, 3, 5, 2 roubles; du point B, 4, 1, 6, 7 roubles; du point C, 1, 9, 4, 3 roubles. Elaborer le plan de transport optimal assurant les frais minimaux.

Réponse. $L_{\min} = 140$ roubles. Pour le plan optimal: $x_{14} = x_{22} = 10$, $x_{23} = x_{31} = x_{34} = 5$, $x_{33} = 15$.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES 5

§ 1. Intégrale double en coordonnées rectangulaires 5
§ 2. Changement de variables d'une intégrale double 10
§ 3. Calcul des aires des figures planes 14
§ 4. Calcul des volumes 17
§ 5. Calcul des aires des surfaces 20
§ 6. Applications mécaniques de l'intégrale double 23
§ 7. Intégrale triple 28
§ 8. Applications des intégrales triples 33

Chapitre II. INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE 37

§ 1. Intégrales curvilignes prises le long d'un arc et par rapport aux coordonnées 37
§ 2. Indépendance d'une intégrale curviligne de deuxième espèce du contour d'intégration. Recherche d'une fonction d'après sa différentielle totale 43
§ 3. Formule de Green 46
§ 4. Calcul des aires de surfaces 48
§ 5. Intégrales de surface 50
§ 6. Formules de Stokes et d'Ostrogradski-Gauss. Eléments de la théorie du champ 53

Chapitre III. SÉRIES 60

§ 1. Séries numériques 60
§ 2. Séries de fonctions 75
§ 3. Séries entières 80
§ 4. Développement des fonctions en séries entières 88
§ 5. Calcul approché des valeurs des fonctions à l'aide des séries entières 92
§ 6. Application des séries entières au calcul des limites et des intégrales définies 99
§ 7. Nombres complexes et séries à termes complexes 101

§ 8. Série de Fourier 114
§ 9. Intégrale de Fourier 124

Chapitre IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES 130

§ 1. Equations différentielles du premier ordre 130
§ 2. Equations différentielles d'ordres supérieurs 164
§ 3. Equations linéaires d'ordres supérieurs 172
§ 4. Intégration des équations différentielles à l'aide des séries 197
§ 5. Systèmes d'équations différentielles 204

Chapitre V. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES PROBABILITÉS 218

§ 1. Evénement aléatoire. Fréquence et probabilité d'un événement aléatoire 218
§ 2. Axiome de l'addition des probabilités et axiome des probabilités composées 220
§ 3. Répétition des épreuves 226
§ 4. Formule de la probabilité complète. Formule de Bayes 228
§ 5. Variables aléatoires et lois de leur répartition 231
§ 6. Espérance mathématique d'une variable aléatoire. Dispersion 237
§ 7. Mode et médiane 241
§ 8. Répartition de densité uniforme 243
§ 9. Loi de répartition binomiale. Loi de Poisson 244
§ 10. Loi de répartition normale et fonction de Laplace 248
§ 11. Moments d'une variable aléatoire 251
§ 12. Lois de grands nombres 256
§ 13. Théorème de Moivre-Laplace 261
§ 14. Systèmes de variables aléatoires 262
§ 15. Lignes de régression. Corrélation 274

Chapitre VI. NOTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 281

§ 1. Equations différentielles du premier ordre linéaires par rapport aux dérivées partielles 281
§ 2. Exemples des plus simples équations différentielles aux dérivées partielles 284
§ 3. Types d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre. Réduction à la forme canonique 284
§ 4. Equation de la corde vibrante 290
§ 5. Equation de diffusion thermique (de la chaleur) 297
§ 6. Problème de Dirichlet pour le disque 305

Chapitre VII. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE 309

§ 1. Fonctions d'une variable complexe. Continuité 309
§ 2. Dérivées des fonctions d'une variable complexe 313
§ 3. Notions de représentation conforme 317
§ 4. Intégrale par rapport à une variable complexe 321

§ 5. Séries de Taylor et de Laurent 326
§ 6. Calcul des résidus des fonctions. Utilisation des résidus pour le calcul des intégrales 334

Chapitre VIII. ÉLÉMENTS DE CALCUL OPÉRATIONNEL 340
§ 1. Recherche des images des fonctions 341
§ 2. Recherche de l'original d'après son image 343
§ 3. Convolution des fonctions. Images des dérivées et de l'intégrale de l'original 347
§ 4. Application du calcul opérationnel à la résolution de certaines équations différentielles et intégrales 350
§ 5. Formule générale d'inversion 353

Chapitre IX. MÉTHODES DE CALCUL 356
§ 1. Solution approchée des équations 356
§ 2. Interpolation 369
§ 3. Calcul approché des intégrales définies 375
§ 4. Intégration numérique des équations différentielles 381
§ 5. Méthode des approximations successives de Picard 390
§ 6. Méthodes élémentaires de traitement des données expérimentales 393

Chapitre X. PROGRAMMATION LINÉAIRE 406
§ 1. Inégalités linéaires et domaine de solutions d'un système d'inégalités linéaires 406
§ 2. Problème fondamental de la programmation linéaire 410
§ 3. Méthode du simplexe 414
§ 4. Problèmes duaux 430
§ 5. Problème de transport 432